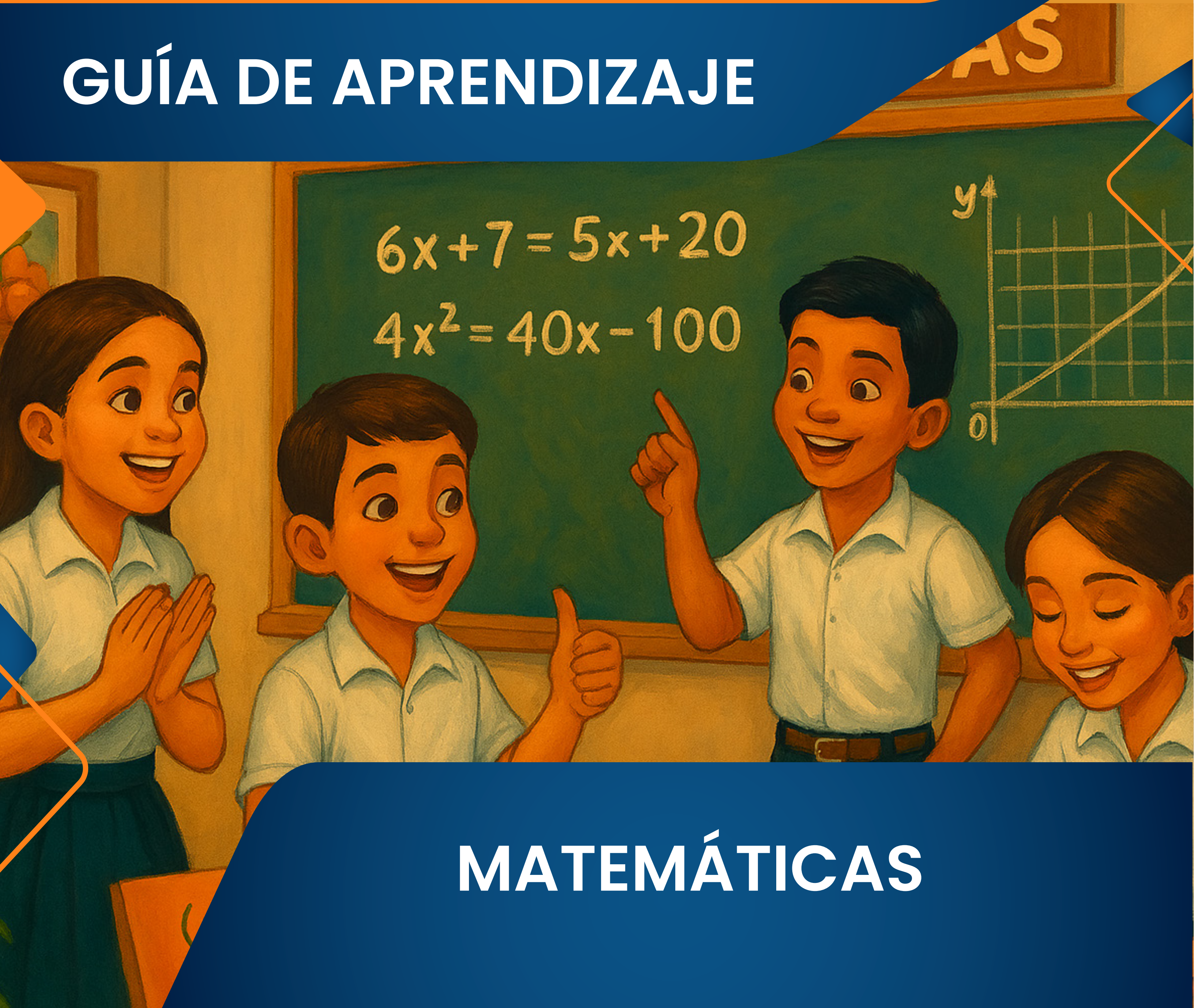
Dirección de Secudaria a Distancia en el Campo

10mo Grado

GUÍA DE APRENDIZAJE



MATEMÁTICAS

CRÉDITOS

Dirección y coordinación general.

Tessia Olga Torres Thomas
Directora General de Eduación Secundaria (a.i)

Dirección y coordinación específica.

Mariana del Socorro Saborio Rodríguez
Directora de Programación Educativa

Elaborado por:

Alicia Verónica Ortiz Toruño
Asesora pedagógico Secundaria a Distancia en el Campo

Álvaro Alfonso Vega Estrada
Asesor pedagógico Secundaria a Distancia en el Campo

Huáscar Amaru Velásquez Valdez
Profesor De Educación Media - Secundaria Rural

José Bismarck Zeledón Centeno
Director de Núcleo Educativo Rural

Magda Catalina Maldonado Castillo
Directora de centro educativo

Marlon Bismarck Montoya
Profesor De Educación Media - Secundaria Rural

José Daniel Espinoza García
Facilitador de Formación Continua (IDEAS – CCD)

Luis Arcenio Zeledón Martínez
Profesor De Educación Media - Secundaria Rural

Revisión técnica:
Ministerio de Educación

Apoyo en Proceso de Validación:
Francisca del Socorro Cárcamo Olivas
Técnica de Programación Educativa

Diseño y Diagramación:

Indira Kasandra Salazar Cruz - Diseñadora gráfica (IDEAS – CCD)

Presentación

Estimado estudiante

El Gobierno de Reconciliación y Unidad Nacional, a través del Ministerio de Educación (MINED), entrega a estudiantes de Educación Secundaria a Distancia en el Campo, Guía de Aprendizaje de Matemática en Décimo grado, el que contiene actividades de aprendizaje e información científica relacionada a los contenidos a abordar en el segundo semestre.

La guía de aprendizaje que ponemos en tus manos, facilitará el desarrollo del encuentro y tu estudio independiente.   Podrás transcribir las actividades a tu cuaderno y de esta manera la guía será utilizada por otros estudiantes en el siguiente año escolar, por lo cual te invito a cuidarla, no rayarla y regresarla al centro de estudio.

Estamos seguros que será un material de mucho provecho para usted y con el acompañamiento de la maestra o maestro, harán efectivo el desarrollo de las actividades durante la clase y la continuidad de las mismas en su hogar con el acompañamiento de su familia.

"Seguimos adelante, procurando hacer lo mejor todos los días, para que unidos sigamos construyendo el porvenir". (Murillo. R, 2024)

Índice

Encuentro 1:

Funciones trigonométricas de Ángulos Agudos en Triángulos Rectángulos

- Razones entre las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo
- Funciones trigonométricas seno, coseno y tangente de un ángulo $(0^0 < \theta < 90^0)$
- Valores de las funciones trigonométricas

Estimado estudiante, en este encuentro estudiaremos como utilizar las relaciones entre las funciones trigonométricas, en la solución de situaciones en diferentes contextos.

A continuación, te presentamos la siguiente información referida a funciones trigonométricas de Ángulos Agudos en Triángulos Rectángulos. para que la leas y analices cada uno de los ejemplos desarrollados.

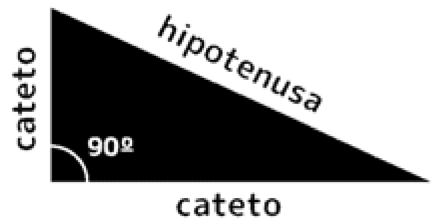
Sabias que…

- La historia de la trigonometría comienza con los babilonios.
- Los egipcios establecieron la medida de los ángulos en grados, minutos y segundos.
- Las funciones trigonométricas son de gran importancia en física, astronomía, cartografía, náutica, telecomunicaciones, la representación de fenómenos periódicos, y otras muchas aplicaciones.

En el siguiente esquema te presentamos información importante sobre los triángulos rectángulos y sus características. Esto como un repaso ya que en noveno grano estudiaste el teorema de Pitágoras, el cual se fundamenta en los triángulos rectángulos.

¿Qué es un triángulo rectángulo? ¿Cuáles son sus características?

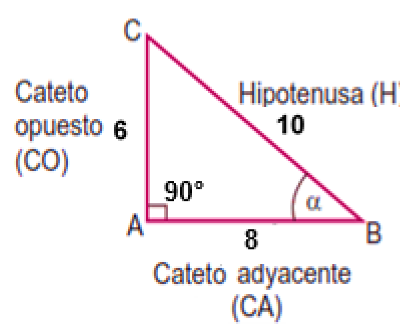
- Es un triángulo que posee un **ángulo de 90°.** Es decir, es un polígono que consta de tres lados, tres vértices y tres ángulos, y uno de estos ángulos es recto.
- Cada uno de los lados del triángulo rectángulo recibe un nombre: catetos e hipotenusa.
  - **Ángulo recto:** es un ángulo que mide 90 grados. Los dos lados que forman el ángulo recto son perpendiculares.
  - **Catetos:** son los dos lados que forman el ángulo recto.
  - **Hipotenusa:** es el lado opuesto al ángulo recto y es el lado más largo del triángulo.



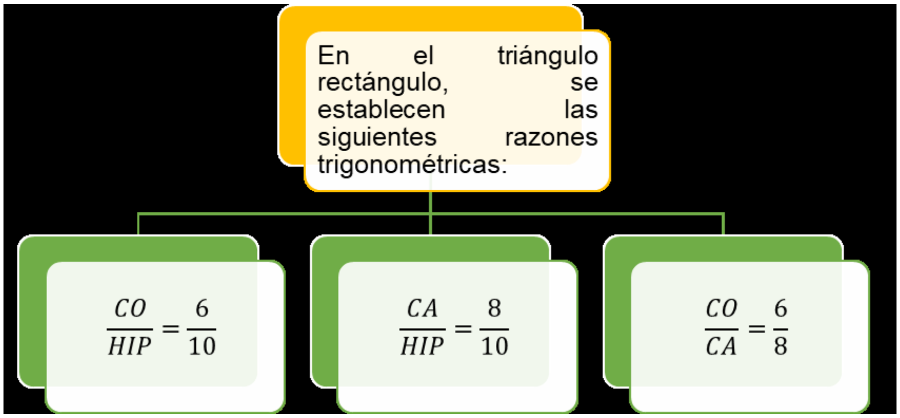
Razones trigonométricas

La noción de razón trigonométrica se refiere a las relaciones que podemos establecer entre los lados de un triángulo rectángulo, el cual nos permite definirlas como el cociente entre los lados.

En un triángulo rectángulo, distinguimos: la hipotenusa y los catetos. El cateto que se opone al ángulo α recibe el nombre de cateto opuesto y el otro es el cateto adyacente.



Por comodidad nos referiremos a la hipotenusa como HIP, al cateto opuesto como CO, y al cateto adyacente como CA.



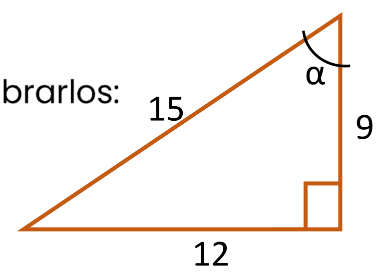
Las razones entre los lados de un triángulo rectángulo no dependen del tamaño del triángulo, sino solamente del ángulo agudo que se considere, esto significa que son funciones de un ángulo.

A partir de las razones trigonométricas que establecen la relación entre los lados de un triángulo rectángulo, nos permite definir las funciones trigonométricas básicas del ángulo agudo α, que son las siguientes:

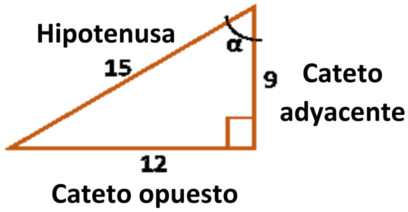
1) **Seno** $\alpha \rightarrow$ $\boldsymbol{sen\ \alpha} = \frac{CO}{HIP}$
2) **Coseno** $\alpha \rightarrow$ $\boldsymbol{\cos\alpha} = \frac{CA}{HIP}$
3) **Tangente** $\alpha \rightarrow$ $\boldsymbol{tan\ \alpha} = \frac{CO}{CA}$

Ejemplo 1: Calcule las razones trigonométricas del siguiente triángulo, respecto al ángulo indicado**.**

Solución:



Primeramente, identificar los elementos del triángulo y nombrarlos:



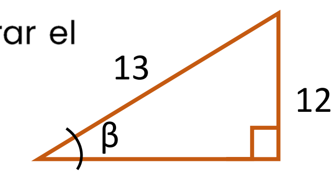
Luego sustituir los valores de los elementos correspondientes en cada razón trigonométrica para obtener el valor de cada función trigonométrica:

$$\boldsymbol{sen\ \alpha} = \frac{CO}{HIP} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}$$

$$\boldsymbol{\cos\alpha} = \frac{CA}{HIP} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$$

$$\boldsymbol{tan\ \alpha} = \frac{CO}{CA} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$$

Ejemplo 2: Utilice las razones trigonométricas para encontrar el valor del ángulo β del siguiente triángulo.



Solución:

Para encontrar el valor del ángulo, utilizamos la razón seno, ya que conocemos la hipotenusa y el cateto opuesto a β.

$$sen\ \beta = \frac{CO}{HIP} = \frac{12}{13} = 0,923$$

Para obtener el valor del ángulo, utilizamos la calculadora, en grados, el valor 0,923 presionando la tecla $\boldsymbol{sen^{-1}}$**,** y aparecerá el valor de 22,63°.

$$\beta = sen^{-1}(0{,}923)$$

Luego $\beta = 67{,}43°$

Lee la siguiente información para que conozcas sobre las funciones trigonométricas

Funciones trigonométricas inversas

- También son conocidas como funciones arco: arcoseno, arco coseno y arco tangente.
- Una función trigonométrica toma un ángulo y devuelve una razón, la función trigonométrica inversa toma una razón y devuelve el ángulo.

Funciones trigonométricas inversas básicas

- arcoseno α → $arcosen\ \alpha$ o $sen^{-1} = \frac{HIP}{CO}$
- arcocoseno α → $arcocos\alpha$ o $cos^{-1} = \frac{HIP}{CA}$
- arcotangente α → $arcotan\ \alpha$ o $tan^{-1} = \frac{CA}{CO}$

Aplicaciones

- Encontrar ángulos en triángulos rectángulos: Si se conocen dos lados de un triángulo rectángulo, las funciones trigonométricas inversas pueden usarse para encontrar los ángulos.
- Resolver ecuaciones trigonométricas: Permiten encontrar el ángulo cuando se conoce el valor de la razón trigonométrica.

Ejemplo:

¿Cuál es el ángulo cuyo valor del seno es 0,9902?
Solución:
Para encontrar lo que se nos pide, con la calculadora realizamos el procedimiento descrito a continuación.

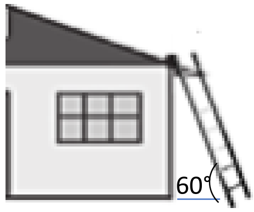
- Verifiquemos que la calculadora esté en modo DEG (grados)
- Pulsemos la tecla Shift.
- Digitemos la tecla sin
- Pulsemos el número: 0,9902
- Finalmente digitemos la tecla sen^{-1}

En la pantalla de la calculadora nos aparecerá: 82.
Interpretación: 82° es el ángulo cuyo valor del seno es 0,9902.

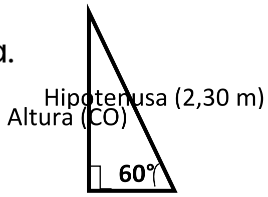
Ejemplo 3: Resuelve el siguiente problema aplicando las razones trigonométricas.

Juan usa una escalera de 2,30 m de longitud para subir al techo de su casa, con el propósito de tapar algunas goteras. ¿Qué altura alcanza la escalera cuando su extremo inferior forma con el suelo un ángulo de 60º?

1. Dibujar una figura que represente la situación, identificando el triángulo rectángulo.



2. Identificar los lados del triángulo que forma la escalera con la casa.



3. Seleccionar la función adecuada que relacione los lados del triángulo de acuerdo al ángulo de referencia.

   Al observar el triángulo, te darás cuenta de que la altura que alcanza la escalera corresponde al cateto opuesto, la función relacionada a este es el seno.

4. Plantear y resolver la ecuación de la función trigonométrica que permita calcular la altura del árbol.

   $sen 60° = \frac{CO}{HIP} \quad \rightarrow \qquad sen\ 60° = \frac{Altura}{HIP}$

   Despejar la altura: $Altura = sen\ 60° \times HIP$

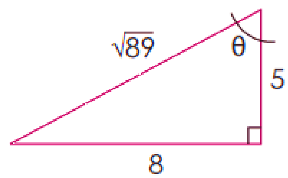
   Sustituir los valores: $Altura = 0{,}8660 \times 2.30m$

   $Altura = 1{,}99\ m$

5. Verificar la solución

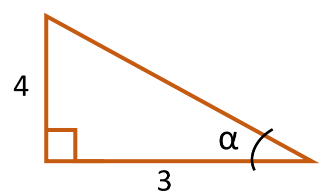
   La altura alcanzada por la escalera es de $1{,}99\ m$ cuando forma un ángulo de 60° con el suelo. Esto permite a Juan subir de manera segura para tapar las goteras.

A continuación, se proponen las siguientes actividades para que realice su autoevaluación.



1. Calcule las razones trigonométricas del siguiente triángulo, respecto al ángulo indicado.

2. Utilice las razones trigonométricas para encontrar el valor del ángulo β del siguiente triángulo.



3. Resuelve el siguiente problema aplicando las razones trigonométricas.

Un árbol de mango proyecta una sombra de 5 m con ángulo solar de 45°. ¿Cuál es su altura?

Guía de autoestudio.

Realizar en su cuaderno las siguientes actividades.

1. Consolidar aprendizajes sobre las funciones trigonométricas básicas (seno, coseno y tangente), de acuerdo al ángulo agudo de referencia, a través de un cuadro sinóptico.

2. Construir un triángulo rectángulo cuyos ángulos agudos miden 45º, medirán la longitud de sus lados y calculan las funciones trigonométricas básicas.
3. Construir un triángulo rectángulo cuyos ángulos agudos miden 30º y 60º, medirán la longitud de sus lados y calculan las funciones trigonométricas básicas.
4. Comparar los valores obtenidos y redactar sus conclusiones.
5. Resolver el siguiente problema de forma ordenada y describiendo paso a paso el proceso desarrollado.
   a) Calcular la altura de un poste que proyecta una sombra de 8 metros con ángulo de 45º.

Encuentro 2:

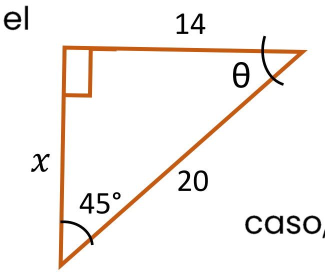
Funciones trigonométricas de Ángulos Agudos en Triángulos Rectángulos

– Valores de las funciones trigonométricas

Estimado estudiante, en este encuentro continuaremos con el estudio de las funciones trigonométricas haciendo énfasis en como calcular sus valores para ángulos agudos, en la solución de situaciones en diferentes contextos.

En el encuentro anterior se estudiaron las razones y funciones trigonométricas básicas (seno, coseno y tangente), para fortalecer los aprendizajes sobre este contenido, analice el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1. Utilice las razones trigonométricas para resolver el siguiente triángulo:



Tener en cuenta que, resolver un triángulo implica encontrar los valores que le hacen falta, ya sean ángulos o lados. En este caso, se debe encontrar el ángulo θ y el lado x.

Solución:

Identificar los elementos conocidos en el triángulo rectángulo, para definir la razón trigonométrica a utilizar.

Para encontrar el valor de x utilizaremos el coseno, ya que conocemos el cateto adyacente con relación al ángulo de 45° y la hipotenusa que es igual a 20:

$$cos\ 45° = \frac{CO}{HIP} = \frac{x}{20}$$

Despejar x:

$$x = 20 \times cos\ 45° = 20 \times 0{,}7071 = 14{,}14$$

$$x = 14$$

Para encontrar el ángulo θ, utilizaremos coseno:

$$cos\ \theta = \frac{CA}{HIP} = \frac{14}{20} = \frac{7}{10} = 0{,}7$$

$$\theta = cos^{-1}0{,}7 \quad \rightarrow \quad \theta = 45°$$

Observe que, para este triángulo ambos ángulos miden 45° lo que significa que los valores de las razones seno y coseno deben ser iguales y el valor de la tangente igual a 1, para verificarlo ahora calcule el valor del seno y tangente.

En el encuentro anterior se estudiaron las razones trigonométricas básicas, debes saber que estas tienen sus reciprocas que son:

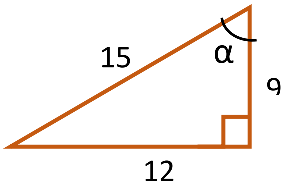
4) Cosecante α→ $\boldsymbol{csc\ \alpha} = \frac{HIP}{CO}$

5) Secante α→ $\boldsymbol{\sec \alpha} = \frac{HIP}{CA}$

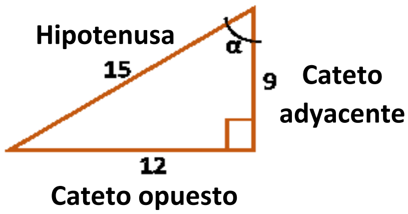
6) Cotangente α→ $\boldsymbol{cot\ \alpha} = \frac{CA}{CO}$

Para una mejor comprensión observar el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2. Calcule las funciones recíprocas cosecante, secante y cotangente del ángulo α.



Primeramente, identificar los elementos del triángulo y nombrarlos.



Luego sustituir los valores de los elementos correspondientes en cada razón trigonométrica reciproca para obtener el valor de cada función trigonométrica.

Puedes verificar que son las funciones reciprocas, calculando el seno, coseno y tangente.

$$\boldsymbol{csc\ \alpha} = \frac{HIP}{CO} = \frac{15}{12} = \frac{5}{4}$$

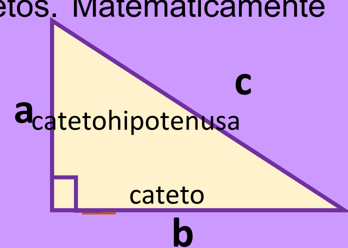
$$\boldsymbol{sec\ \alpha} = \frac{HIP}{CA} = \frac{15}{9} = \frac{5}{3}$$

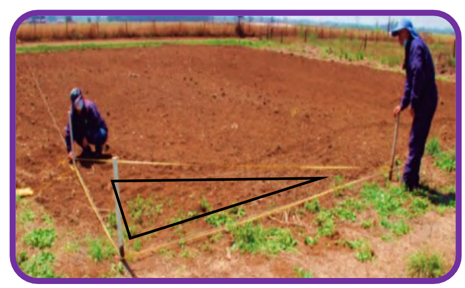
$$\boldsymbol{cotan\ \alpha} = \frac{CA}{CO} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$$

A continuación, haremos un repaso sobre el teorema de Pitágoras.

El teorema de Pitágoras señala que el cuadrado de la hipotenusa, en los triángulos rectángulos, es igual a la suma de los cuadrados de los catetos. Matemáticamente sería:

$$\boldsymbol{c^2 = a^2 + b^2}$$





agudos

Ya has estudiado como obtener los valores de las funciones trigonométricas a partir de un ángulo de referencia, a continuación, observe el siguiente ejemplo en el que se obtiene el valor de una función trigonométrica a partir de otra.

Ejemplo 3. Si A es un ángulo agudo de un triángulo rectángulo y $tan\ A = \frac{3}{2}$, calcule los valores de $sen\ A\ y\ cos\ A$.

Solución

Dado que $tan\ A = \frac{CO}{CA}$, tenemos que: $CO = 3\ y\ CA = 2$

Aplicar teorema de Pitágoras para encontrar el valor de la hipotenusa: $H^2 = CO^2 + CA^2$

$H^2 = 3^2 + 2^2 \rightarrow H = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$

Ahora calculamos los valores de $sen\ A\ y\ cos\ A$

$$sen\ A = \frac{CO}{HIP} = \frac{3}{\sqrt{13}}, \qquad cosA = \frac{CA}{HIP} = \frac{2}{\sqrt{13}}$$

Calcule los valores que a continuación se piden:

Si A es un ángulo agudo de un triángulo rectángulo y $sen\ A = \frac{1}{4}$, calcule los valores de $cos\ A\ y\ tan\ A$.

Valores de las funciones trigonométricas de ángulos de 30° y 60°

Anteriormente habías realizado el cálculo de algunos ángulos agudos particulares como 30°, 45° y 60°, de los cuales comparaste los valores obtenidos.

Un teorema de la geometría plana expresa que:

En todo triángulo rectángulo de 30° y 60°, la hipotenusa (lado mayor), es el doble del cateto menor.

Esto nos lleva a asegurar que si tenemos un triángulo rectángulo cuya hipotenusa mide 1 unidad, el cateto menor medirá $\frac{1}{2}$.

Aplicando el teorema de Pitágoras hallamos la medida del cateto mayor.

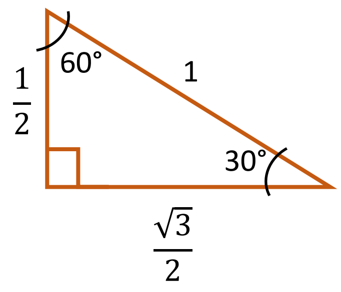
$c^2 = a^2 + b^2$

Despejamos $b \rightarrow \quad b = \sqrt{c^2 - a^2}$

Sustituir los valores $b = \sqrt{1^2 - \frac{1}{2}^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{4-1}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{3}{2^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

El valor del cateto mayor nos queda: $\frac{\sqrt{3}}{2}$

Observe la figura de la derecha, así resulta el triángulo.



De lo anterior obtenemos las razones trigonométricas del triángulo rectángulo de 30° y 60°.

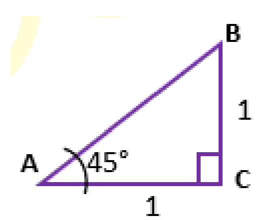
β	$\operatorname{sen}\beta$	$\cos\beta$	$\tan\beta$
$30°$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
$60°$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$

Valores de las funciones trigonométricas para un ángulo de 45°

Para los valores de las funciones trigonométricas con ángulo de 45°, tenga en cuenta que este caso tenemos un triángulo isósceles. Cuando se tiene un triángulo rectángulo isósceles significa que los catetos tienen la misma medida y los ángulos agudos medirán cada uno 45°. Lo anterior lo garantiza la proposición que expresa que:

"En todo triángulo, a lados congruentes (de igual medida) se oponen ángulos congruentes (de igual medida)".

Teniendo en cuente el siguiente triángulo rectángulo isósceles, calcule los valores de sen 45°, cos 45° y tan 45°.



Aplicando el teorema de Pitágoras, tenemos: $c^2 = a^2 + b^2$

$AB^2 = 1^2 + 1^2$ Sustituir los valores

$AB^2 = 1 + 1$ Desarrollar las potencias:

$AB = \sqrt{2}$ Sumar y aplicar raíz cuadrada a ambos lados de la igualdad:

Luego se calcula el valor de las funciones:

$$sen\ 45° = \frac{CO}{HIP} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\cos 45° = \frac{CA}{HIP} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

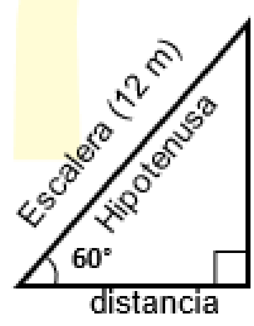
$$tan\ 45° = \frac{CO}{CA} = \frac{1}{1} = 1$$

Algunas aplicaciones de las funciones trigonométricas en la vida cotidiana.

Es importante saber que las funciones trigonométricas nos permiten resolver muchas situaciones de la vida cotidiana que involucran triángulos rectángulos.

Para una mejor comprensión analice el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4. Miguel tiene una escalera de 12 metros de longitud, que utiliza para subir a un árbol de aguacates. Para garantizar su seguridad la escalera debe formar un ángulo de 60° con el suelo ¿A qué distancia de la base del árbol debe colocar el pie de la escalera para que esté firme y no resbale?



Solución:

1. Dibujar una figura que represente la situación, identificando el triángulo rectángulo.
2. Identificar los lados del triángulo.
   - La escalera: hipotenusa
   - Ángulo de 60°
   - Distancia: cateto adyacente

3. Seleccionar la función adecuada que relacione los lados del triángulo de acuerdo al ángulo de referencia.

   De acuerdo a la pregunta del problema, se debe calcular la distancia a la que se coloca la escalera de la base del árbol y esta corresponde al cateto adyacente, la función relacionada es el coseno.

4. Plantear y resolver la ecuación de la función trigonométrica que permita calcular la altura del árbol.

   $cos\ 60° = \frac{CA}{HIP}$ $\qquad$ $cos\ 60° = \frac{distancia}{HIP}$

   Despejar la distancia: $distancia = cos\ 60° \times HIP$

   Sustituir los valores: $distancia = 0{,}5 \times 12m$

   $$distancia = 6\ m$$

5. Verificar la solución

La distancia a la que se debe colocar la escalera es de $6\ m$ cuando forma un ángulo de 60º con el suelo. Esto permite a Miguel subir de manera segura.

Guía de autoestudio.

Estimado estudiante con el propósito de fortalecer sus aprendizajes, se le brinda la guía de autoestudio la cual permitirá afianzar los conocimientos adquiridos.

Realizar en su cuaderno las siguientes actividades.

1. Si A es un ángulo agudo de un triángulo rectángulo y $\cos A = \frac{3}{4}$, calcule los valores de $sen\ A\ y\ tan\ A$.
2. Resolver el siguiente problema de forma ordenada y describiendo paso a paso el proceso desarrollado.

En la comunidad "Las Delicias", los pobladores están instalando un poste telefónico para mejorar la comunicación. Para asegurar que el poste no se caiga con el viento, lo sujetan con un cable tensor. El cable forma un ángulo de 68º con el suelo, y la distancia desde la base del poste hasta donde está anclado el cable en el suelo es de 2 metros. ¿Qué longitud debe tener el cable tensor para que el poste quede bien sujeto?

3. Lee la información del encuentro Nº 3 relacionada a ángulos positivos y ángulos negativos. Establezca diferencias entre ambos tipos de ángulos.

Encuentro 3:

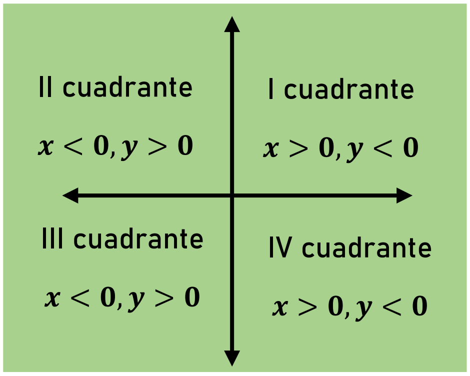
Funciones trigonométricas para un ángulo cualquiera

- Círculo unitario
- Ángulo en posición normal (ángulos positivos y ángulos negativos)

Estimado estudiante, en este encuentro continuaremos con el estudio de las funciones trigonométricas haciendo énfasis en como calcular sus valores para un ángulo cualquiera en la solución de situaciones en diferentes contextos, a través del círculo unitario y haciendo referencia a ángulos positivos y negativos.

A continuación, te presentamos información relacionada al contenido en estudio.

Empezaremos por recordar, los signos para x e y en cada uno de los cuadrantes del sistema de coordenadas cartesianas xy.



- El eje x es positivo a la derecha y negativo a la izquierda.
- El eje y es positivo hacia arriba negativo hacia abajo

Las funciones trigonométricas para cualquier ángulo, son una extensión de las razones trigonométricas, ya que, en el círculo, se pueden medir, todos los valores de $\theta, (0 \leq \theta \leq 2\pi)$.

A continuación, reflexionemos sobre las siguientes preguntas:

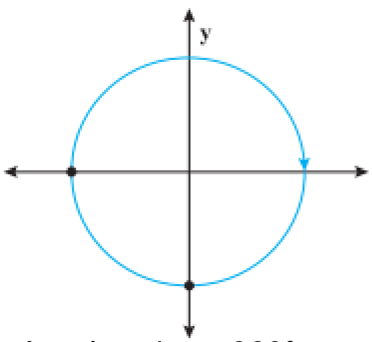
- ¿Qué sabes acerca de la circunferencia unitaria?
- ¿En qué nos ayuda para nuestro estudio?

Posiciones de ángulos en el plano cartesiano

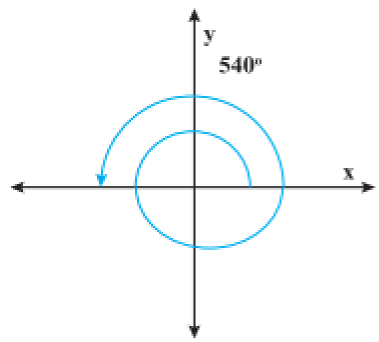
Cuando un segmento de recta, l, se rota desde el lado inicial hasta el lado terminal, establece un ángulo que puede ser; positivo, si l gira en sentido contrario al de las manecillas del reloj, y negativo, si l gira en sentido horario.

Ejemplo. Representa gráficamente los ángulos: -360º, 540º, 120º y 150º

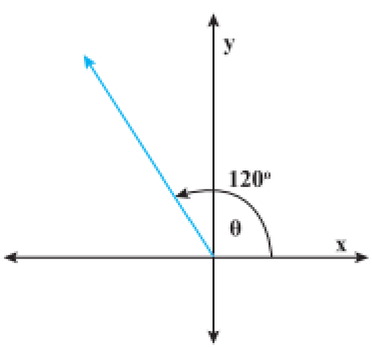
Solución



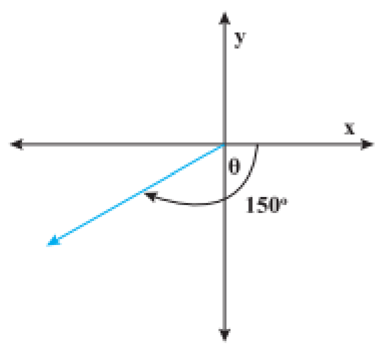
El ángulo de $-360°$ se obtiene haciendo una rotación completa en el sentido horario.



El ángulo de 540° se obtiene haciendo una y media rotación completa en el sentido antihorario.

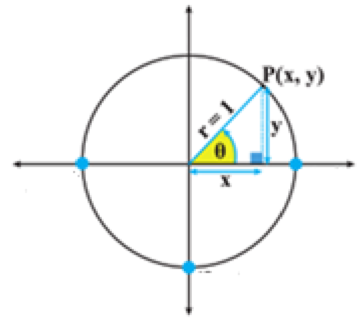


El ángulo de 120°, es positivo, se obtiene rotando en el sentido antihorario. $90° + 30° = 120°$



El ángulo de -150°, es negativo, se obtiene rotando en el sentido horario. $-(90° + 30°) = -150°$

La circunferencia unitaria es una circunferencia con un radio de 1, centrada en el origen de un sistema de coordenadas cartesianas. En trigonometría, se utiliza para definir y visualizar funciones trigonométricas como seno, coseno y tangente.



Es una herramienta fundamental porque permite calcular fácilmente estas funciones para cualquier ángulo, incluso aquellos mayores de 360 grados o 2π radianes.

Analice la situación siguiente:

Sea P un punto en la circunferencia unitaria, y θ, un ángulo de referencia en el primer cuadrante, medido en radianes.

- En el primer cuadrante

$$sen\ \theta = \frac{y}{r} = \frac{y}{1} = y$$

$$cos\ \theta = \frac{x}{r} = \frac{x}{1} = x$$

- En el segundo cuadrante

$$sen\ \theta = \frac{y}{r} = \frac{y}{1} = y$$

$$cos\ \theta = \frac{-x}{r} = \frac{-x}{1} = -x$$

- En el tercer cuadrante

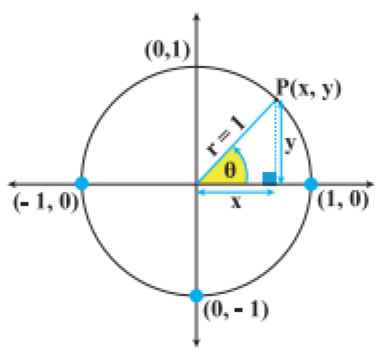
$$sen\ \theta = \frac{-y}{r} = \frac{-y}{1} = -y$$

$$cos\ \theta = \frac{-x}{r} = \frac{-x}{1} = -x$$

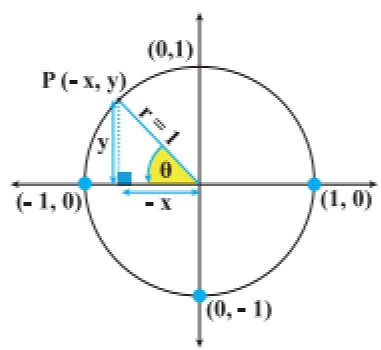
- En el cuarto cuadrante

$$sen\ \theta = \frac{-y}{r} = \frac{-y}{1} = -y$$

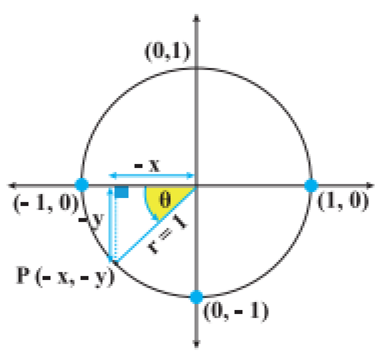
$$cos\ \theta = \frac{x}{r} = \frac{x}{1} = x$$



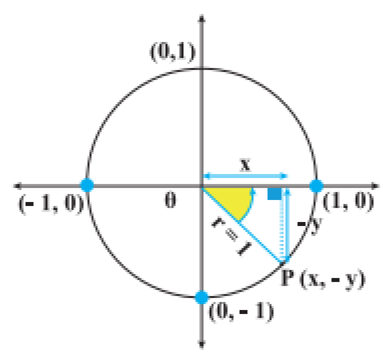
Primer cuadrante



Segundo cuadrante



Tercer cuadrante



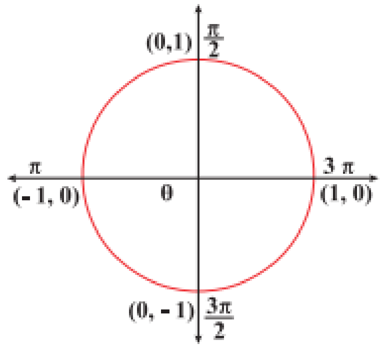
Cuarto cuadrante

De esta manera deducimos los signos de las funciones

Cuadrante	x	y	r	sen θ	cos θ	tan θ
I	+	+	+	$\frac{y}{r} = y$	$\frac{x}{r} = x$	$\frac{y}{x}$
II	–	+	+	$\frac{y}{r} = y$	$\frac{-x}{r} = -x$	$\frac{y}{-x} = -\frac{y}{x}$
III	–	–	+	$\frac{-y}{r} = -y$	$\frac{-x}{r} = -x$	$\frac{-y}{-x} = \frac{y}{x}$
IV	+	–	+	$\frac{-y}{r} = -y$	$\frac{x}{r} = x$	$\frac{-y}{x} = -\frac{y}{x}$

Definición de función trigonométrica

El valor de una función trigonométrica de un número real t es su valor en un ángulo de t radianes, suponiendo que ese valor exista



Si sabemos, en qué cuadrante está el punto P, y si la circunferencia es unitaria, podemos determinar los signos y valores de las funciones trigonométricas para los ángulos;$0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$.

De este modo se deducen los valores de las funciones trigonométricas. Algunas funciones no están definidas para determinado ángulo, por ejemplo:

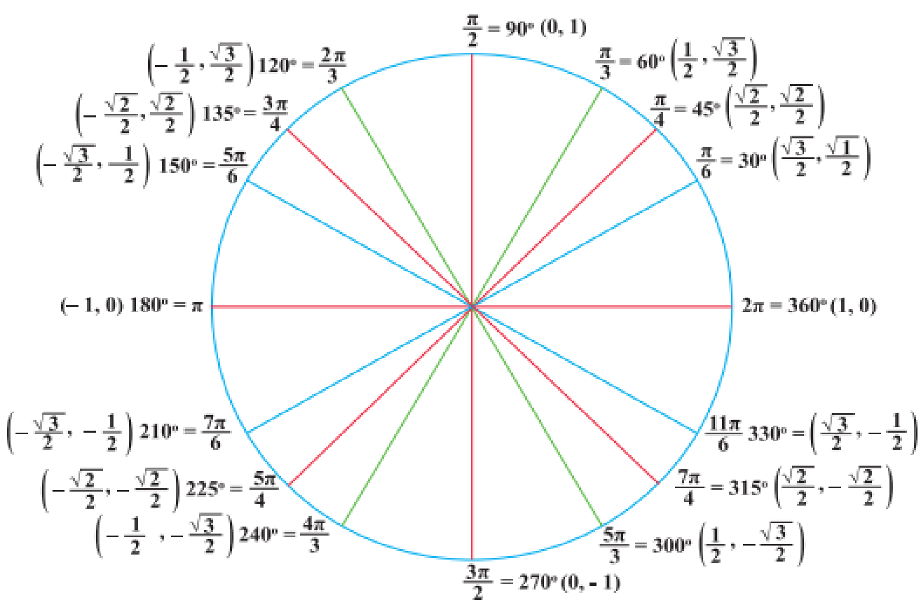
$tan \ = \frac{sen\frac{\pi}{2}}{cos\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{0}$, no está definida para este ángulo.

Ángulo Función	sen θ	cos θ	tan θ
0°	0	1	0
90°	1	0	Indefinida
180°	0	− 1	0
270°	− 1	0	Indefinida
360°	0	1	0

Circunferencia trigonométrica

Es una herramienta de mucha utilidad, en ella representamos, en grados y radianes, el resumen de los valores de las funciones trigonométricas de uso más frecuente mediante la representación de triángulos rectángulos.

Recordemos que el coseno está relacionado con la coordenada x y el seno con la coordenada y, los cuales forman el punto $P(x, y)$, o sea $P\ (cos\theta, sen\theta)$.



Ejemplo 1: Utiliza el circulo trigonométrico y las identidades fundamentales, para obtener los valores de las funciones trigonométricas para el ángulo de $150° = \frac{3\pi}{2}$.

Solución

Ubicamos en la circunferencia trigonométrica el ángulo $150° = \frac{5\pi}{6}$

De este se deduce que: $cos\frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ y $sen\ \frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}$, luego, por identidades fundamentales, determinamos el valor de la tangente:

$$tan\frac{5\pi}{6} = \frac{sen\frac{5\pi}{6}}{cos\frac{5\pi}{6}} \quad \text{recordemos que } tan = \frac{sen}{cos}$$

$$tan\frac{5\pi}{6} = \frac{\frac{1}{2}}{-\frac{\sqrt{3}}{2}} \quad \text{sustituyendo los valores de seno y coseno}$$

$$tan\frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2} \times -\frac{2}{\sqrt{3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \quad \text{simplificando}$$

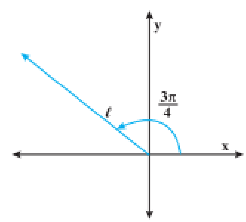
$$tan\frac{5\pi}{6} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

Respuesta: $sen\ \frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}, cos\frac{5\pi}{6} = \ -\frac{\sqrt{3}}{2}$ y $tan\frac{5\pi}{6} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

De esta forma podemos encontrar el valor de las funciones trigonométricas para cualquier ángulo.

Sabías que...

Ángulo en posición normal estándar
Un ángulo, en el sistema de coordenadas cartesianas, está en posición normal estándar, si su vértice está en el origen, y su lado inicial coincide con el eje positivo de las x.



Ejemplo 2. El punto (5, -3) pertenece al lado terminal de un ángulo A que está en posición estándar. Hallemos el valor de las funciones sen, cos y tan del ángulo A.

Solución:

Este ejercicio lo podemos resolver aplicando la definición de las razones trigonométricas en una circunferencia.

$sen = \frac{y}{r}$, $cos = \frac{x}{r}$ y $tan = \frac{y}{x}$

De acuerdo a las coordenadas del punto tenemos: $x = 5$ y $y = -3$

Pero debemos encontrar r mediante el teorema de Pitágoras: $r^2 = x^2 + y^2$

$$r^2 = 5^2 + (-3)^2 = 25 + 9 = 34$$

$$r = \sqrt{34}$$

Ahora que conocemos los valores de x, y y r, podemos escribir los valores de las funciones trigonométricas:

$$senA = -\frac{3}{\sqrt{34}}\,, cos = \frac{5}{\sqrt{34}}\ y\ tan = -\frac{3}{5}$$

Ejercicios:

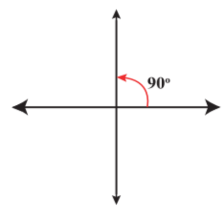
a) Determine el valor de las funciones sen, cos y tan para los ángulos: $\frac{4\pi}{3}\ y\ \frac{7\pi}{4}$

b) El punto (-3, -3) pertenece al lado terminal de un ángulo B que está en posición estándar. Halle el valor de las funciones sen, cos y tan del ángulo B.

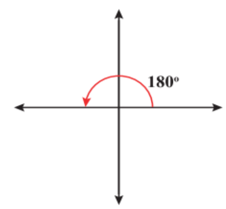
Sabias que…

Ángulo cuadrantal

Se les llama así a los ángulos cuyo lado inicial empieza en el eje x positivo y su lado terminal finaliza en cualquiera de los cuadrantes del plano cartesiano, ya sea 90°, 180°, 270°, 360°, otros…



Ángulo cuadrantal de 90°



Ángulo cuadrantal de 180°

Guía de autoestudio

1- Determine el signo de cada una de las funciones trigonométricas sen, cos y tan para los ángulos cuyas medidas son: 70°, 210° y 306.

2- El punto (-4, 4) pertenece al lado terminal de un ángulo C que está en posición estándar. Halle el valor de las funciones sen, cos y tan del ángulo C.

3- Determine el valor de las funciones sen, cos y tan para los ángulos: $\frac{\pi}{3}\ y\ \frac{7\pi}{6}$

Encuentro 4:

Gráficas de funciones trigonométricas

- Unidades de medidas angulares (equivalencias):
- Grados sexagesimales
- Radianes

Descripción

Estimado estudiante, en este encuentro estudiaremos las unidades de medidas angulares (equivalencias) y las gráficas de las funciones trigonométricas seno y coseno haciendo énfasis en sus propiedades.

A continuación, te presentamos información relacionada al contenido en estudio.

Unidades de medidas angulares (equivalencias)

Para medir los ángulos, los sistemas más utilizados son el circular y sexagesimal.

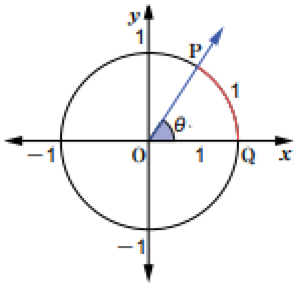
Sistema Sexagesimal

En este sistema, se considera la circunferencia dividida en 360 partes iguales o grados. Cada grado se considera, dividido en 60 partes iguales llamadas minutos y cada minuto en 60 partes iguales llamadas segundos.

1°=60´(minutos)	**1´=60” (segundos)**	**1°=60´=3 600”**

Sistema circular

En este sistema se usa como unidad angular, el “radián”. Un radián es el ángulo cuya medida del arco de la circunferencia, es igual al radio de la misma.



En una circunferencia con centro en O y radio r = 1, sea r la longitud del arco PQ que subtiende el ángulo θ. Entonces, la longitud del arco PQ es la medida en radianes del ángulo central θ.

La longitud de una circunferencia de radio igual a 1 es 2π radianes, es decir: $\mathbf{360°} = \boldsymbol{2\pi rad}$

De donde: $\boxed{\mathbf{180°} = \boldsymbol{\pi rad}}$

$$\boxed{\boldsymbol{2\pi} = \mathbf{2(3,14\ldots)} \approx \mathbf{6,28}\ \boldsymbol{rad}}$$

¿Cómo podemos convertir grados en radianes y radianes a grados?

Para convertir grados a radianes y viceversa hacemos uso de las siguientes fórmulas

$$\mathbf{1°} = \frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{180°}}\boldsymbol{rad} \qquad \mathbf{1}\boldsymbol{rad} = \frac{\mathbf{180°}}{\boldsymbol{\pi}}$$

Es importante aclarar que $\boldsymbol{\pi}$ es una constante que representa la relación entre la circunferencia de un círculo y su diámetro. Es un número irracional, lo que significa que su representación decimal es infinita y no repetitiva. Normalmente, se aproxima a $3{,}14159$ para cálculos cotidianos.

Ejemplo 1. Escriba los siguientes ángulos en radianes.

a) 45°

b) 240°

Solución

a) Si 1°, es igual a rad $\frac{\pi}{180}rad$, 45° equivalen a $45° \cdot \frac{\pi}{180°} = \frac{45°\pi}{180°}$, simplificando por 45 nos queda: $\mathbf{45°} = \frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{4}}\ \boldsymbol{rad}$

$$45° \cdot \frac{\pi}{180°} = \frac{\overset{1}{\cancel{45}}°\pi}{\underset{4}{\cancel{180}}°} = \frac{\pi}{4}$$

b) 240° (resuelva en su cuaderno)

Ejemplo 2. Escriba los siguientes ángulos en grados

a) $\frac{3\pi}{2}$

b) $\frac{7\pi}{4}$

Solución

a) Si $1\text{rad} = \frac{180}{\pi}$ grados

Entonces: $\frac{3\pi}{2} = \frac{3\pi}{2} \cdot \frac{180}{\pi}$, simplificamos por 2 y nos queda

$$\frac{\overset{90}{\cancel{180}}}{\pi} \bullet \frac{3\pi}{\cancel{2}} = \frac{90 \times 3\cancel{\pi}}{\cancel{\pi}} = 270°.$$

$\frac{3\pi}{2} = \frac{3\pi}{1} \cdot \frac{90°}{\pi} = \frac{270\pi}{\pi}$, simplificamos π

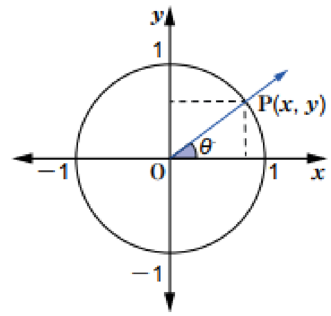
$$\frac{3\pi}{2} = 270°$$

b) $\frac{7\pi}{4}$ (resuelva en su cuaderno)

Gráficas de funciones trigonométricas

Las funciones trigonométricas, como seno, coseno y tangente, son herramientas esenciales para describir fenómenos naturales periódicos, los que se pueden describir mediante una expresión o fórmula matemática como, por ejemplo, el movimiento ondulatorio, las mareas, el clima, el electrocardiograma que se le toma al paciente, las ondas sonoras y la luz, entre otros, por eso es importante su estudio. Estos fenómenos.

Las gráficas de las funciones trigonométricas (seno, coseno, tangente) se representan en el plano cartesiano. Estas funciones se definen como razones entre los lados de un triángulo rectángulo y sus valores dependen del ángulo, no del tamaño del triángulo. A continuación, se describen las características principales de las gráficas de las funciones seno, coseno y tangente, que son las más comunes.



Gráfica y propiedades de la función $y = sen\ \theta$

Recuerde que si $P\ (x, y)$ es el punto de intersección de la circunferencia unitaria y el lado terminal $\overline{OP}$ del ángulo θ, entonces $sen\ \theta = \frac{y}{1} = y$.

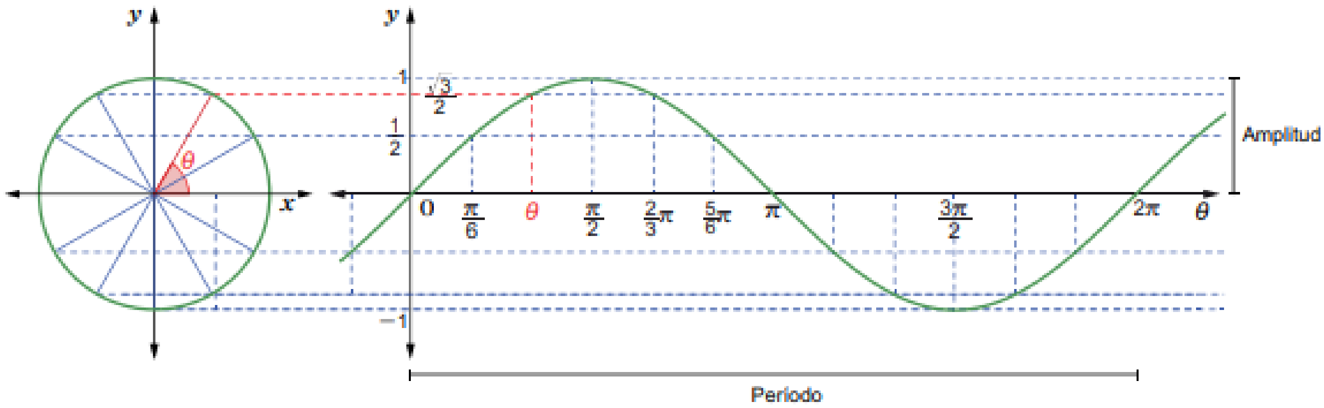
Es decir, la ordenada del punto **P** se identifica con $sen\ \theta$.

Para construir la gráfica de $y = sen(\theta)$, se puede hacer una tabla de valores ocupando los ángulos especiales.

Algunos valores de la función seno ya se habían definido anteriormente en una tabla de valores, la cual te mostramos a continuación:

θ	−90°	0°	90°	180°	270°	360°	450°
en radianes	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π	$\frac{5\pi}{2}$
$y = \text{sen}\ \theta$	−1	0	1	0	−1	0	1

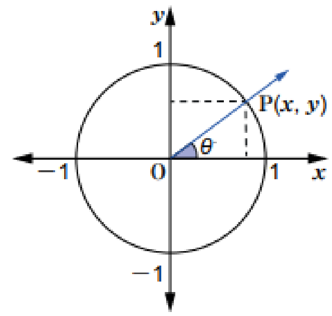
Al ubicar los puntos en el plano y unirlos, la gráfica de $y = sen\ \theta$ será como sigue:



A esta curva se le llama **curva senoidal**. Las propiedades más esenciales son:

- La gráfica se prolonga de manera infinita en ambos sentidos (de izquierda a derecha).
- En el eje de las x, o eje de las abscisas, la función toma todos los valores, lo cual nos indica que su dominio es todo el conjunto de los números reales.
- Se tiene que los valores del rango (valores que toma "y") de la función es $-1 \leq sen\theta \leq 1$, esto implica que, la gráfica se encuentra entre las rectas $y = 1$ y $y = -1$.
- Si tomamos como referencia el cero, observamos que en $x = 2\pi$ la gráfica se repite. Esto nos indica que la función seno es periódica, de período 2π.
- Su intercepto en el eje de "y" es el punto (0;0).
- **La amplitud es 1**. La amplitud es la distancia vertical desde la línea media (posición de equilibrio) hasta la cresta (punto más alto) o el valle (punto más bajo) de la onda.

Gráfica y propiedades de la función $y = cos\ \theta$



Recuerde que si $P\ (x, y)$ es el punto de intersección de la circunferencia unitaria y el lado terminal $\overline{OP}$ del ángulo θ, entonces: $cos\ \theta = \frac{x}{1} = x$

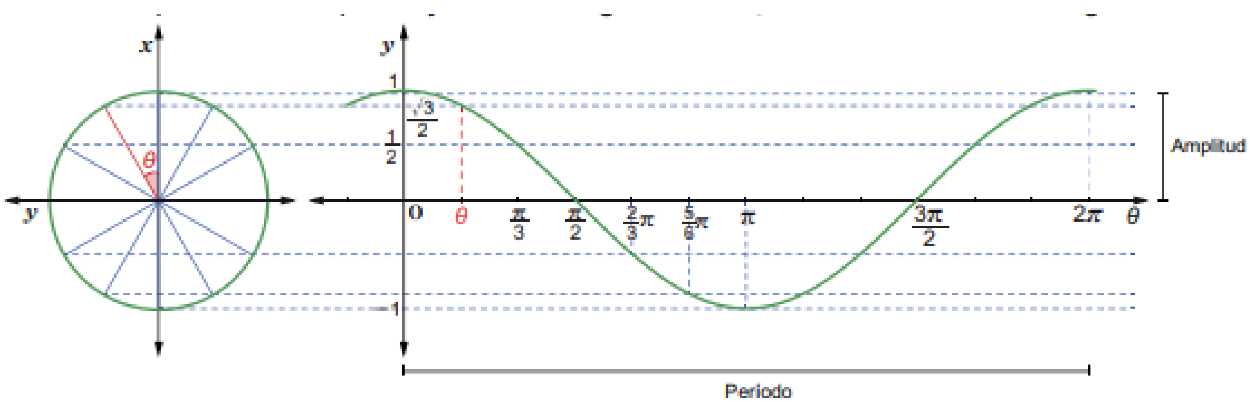
Es decir, la ordenada del punto **P** se identifica con $cos\ \theta$.

Para construir la gráfica de $y = cos(\theta)$, se puede hacer una tabla de valores ocupando los ángulos especiales.

Algunos valores de la función coseno ya se habían definido anteriormente en una tabla de valores, la cual te mostramos a continuación:

θ	−90°	0°	90°	180°	270°	360°	450°
en radianes	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π	$\frac{5\pi}{2}$
$y = \cos\theta$	0	1	0	−1	0	1	0

Al ubicar los puntos en el plano y unirlos, la gráfica de $y = cos\ \theta$ será como sigue:



A esta curva se le llama **curva cosenoidal**. Las propiedades más esenciales son:

- La gráfica se prolonga de manera infinita en ambos sentidos del eje x (de izquierda a derecha).

- La función toma cualquier valor en el eje de las x, o eje de las abscisas, lo cual nos indica que su dominio es todo el conjunto de los números reales.
- Se tiene que los valores del rango (valores que toma "y") de la función es $-1 \leq cos\theta \leq 1$, esto implica que, la gráfica se encuentra entre las rectas $y = 1$ y $y = -1$.
- Si tomamos como referencia el cero, observamos que en $x = 2\pi$ la gráfica se repite. Esto nos indica que la función coseno es periódica, de período 2π.
- Su intercepto en el eje de "y" es el punto (0;1).
- **La amplitud es 1**.

Teniendo en cuenta las propiedades de la función seno y la función coseno responde las siguientes preguntas:

1- Enumere sus semejanzas.

2- Enumere sus diferencias.

3- ¿Por qué decimos que las funciones seno y coseno son periódicas? ¿Cuál es su período?

4- ¿Cuál es el valor máximo que alcanza la función seno? ¿Cuál es el valor mínimo?

5- ¿Por qué se dice que el dominio de la función coseno es todo el conjunto de los números reales?

Guía de autoestudio

A continuación, se proponen las siguientes actividades para que realice su autoestudio.

1. Escriba los siguientes ángulos en radianes.

a) 60º b) 120º c) 300º

2. . Escriba los siguientes ángulos en grados

a) $\frac{\pi}{2}$ b) $\frac{5\pi}{6}$ c) $\frac{\pi}{6}$

3. Traza las siguientes gráficas

   a) $y = 2sen(\theta)$
   b) $y = \frac{1}{2}cos\ \theta$
   c) Compara los resultados con las gráficas $y = sen\theta$ y $y = cos\ \theta$.

Encuentro 5:

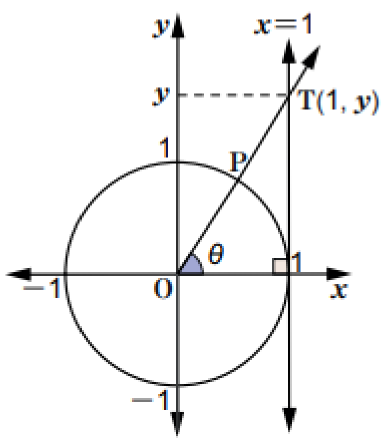
Gráficas de las funciones $y = sen\ \theta,\ y = cos\ \theta\ \ y\ = tan\ \theta$

Descripción

Estimado estudiante, en este encuentro continuaremos el estudio de las gráficas de las funciones trigonométricas seno y coseno haciendo énfasis en sus propiedades.

A continuación, te presentamos información relacionada al contenido en estudio para que la leas y analices cada uno de los ejemplos desarrollados.

Gráfica y propiedades de la función $y\ =\ tan\ \theta$



Recuerde queque dada una circunferencia de radio $r\ =\ 1$, $\overrightarrow{OP}$ el lado terminal del ángulo $\theta \neq 90°$ y $T(1, y)$ un punto sobre$\overrightarrow{OP}$. Entonces, $tan\ \theta\ = \frac{ordenada\ de\ T}{Absisa\ de\ T} = \frac{y}{1} = y$, es decir, $y\ =\ tan\ \theta$.

Por tanto, la $tan\ \theta$ coincide con la ordenada del punto T.

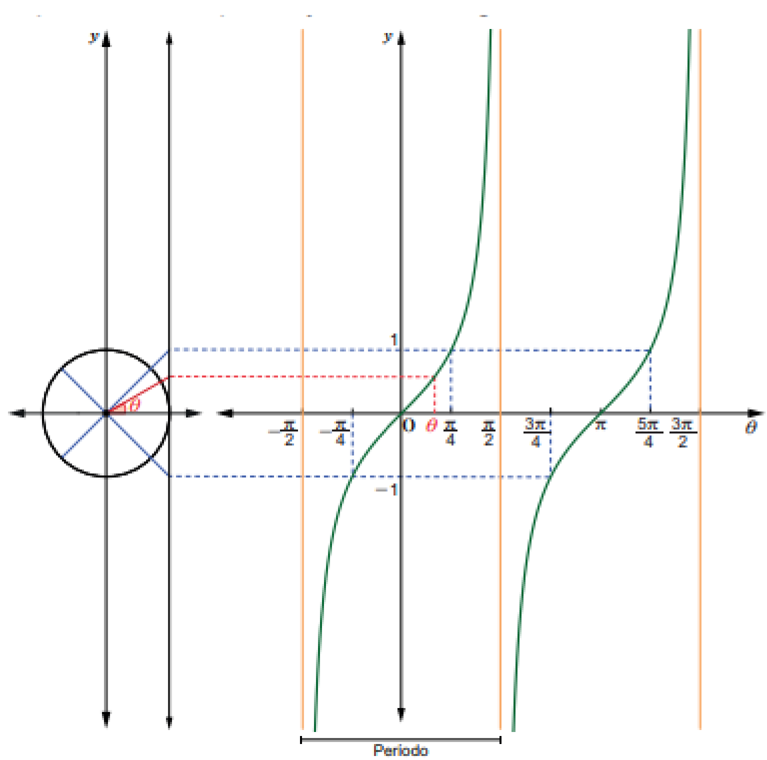
Para construir la gráfica de $y = tan(\theta)$, se puede hacer una tabla de valores ocupando los ángulos especiales.

Algunos valores de la función tangente ya se habían definido anteriormente en una tabla de valores, la cual te mostramos a continuación:

θ	$-90°$	$-45°$	$0°$	$45°$	$90°$	$180°$	$270°$
en radianes	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
$y = \tan\ \theta$	NE	-1	0	1	NE	0	NE

Para cuando θ es igual a cualquier múltiplo impar de $\frac{\pi}{2}$ la tangente no existe. Además, cuando θ toma valores muy cercanos por la izquierda o por la derecha de dichos valores, tan θ tiende a tomar valores extremadamente grandes o pequeños. Se establece entonces que las rectas verticales descritas por tales valores son **asíntotas** de la función tangente.

Al ubicar los puntos en el plano y unirlos, la gráfica de $y = tan\,\theta$ será como sigue



Las asíntotas de la gráfica de una función son líneas rectas a las que una función se aproxima, pero nunca toca a medida que la función se extiende hacia el infinito o hacia valores específicos de x.

Las propiedades más esenciales son:

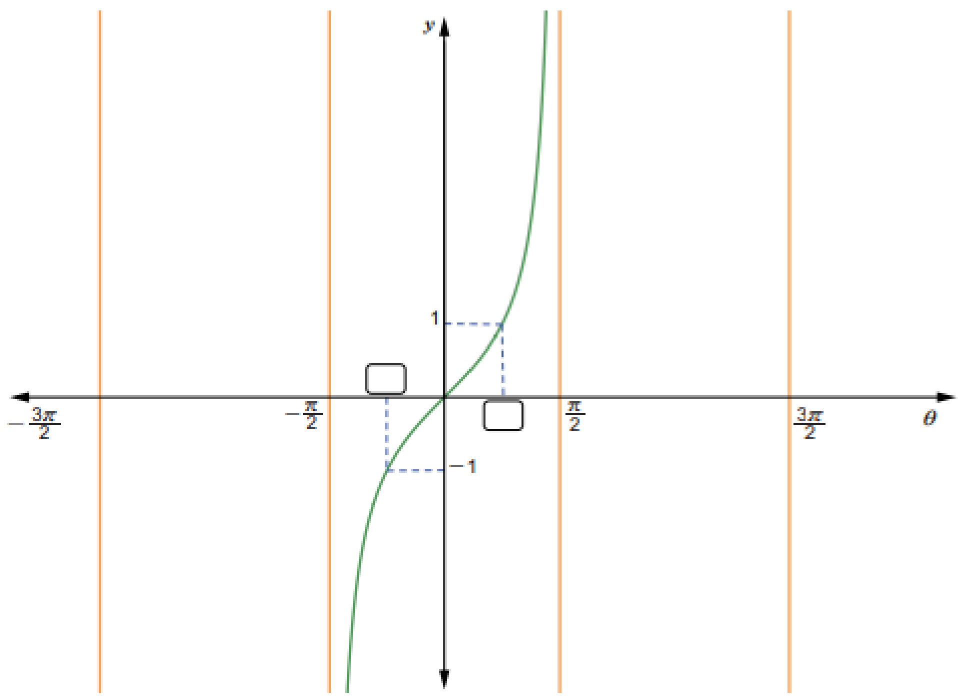
- El dominio de esta función es el conjunto de los números reales menos los valores que toma x que son de la forma $\frac{(2n-1)}{2}$, o bien $\left[\ldots, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \ldots\right]$ donde n es un número entero.

  Si revisamos el gráfico, la función no está definida para estos valores y la recta vertical recibe el nombre de asíntota.

- El rango o recorrido será todo el conjunto de los números reales, ya que la variable dependiente (y) toma cualquier valor en el conjunto de los números reales.
- La función tangente es periódica y su período es π, porque cada π el gráfico de la función se repite.

A partir de lo que ya conoces de la función $tan\ \theta$:

a) Indique los valores correspondientes a los espacios en blanco en el trozo de la gráfica de $y\ =\ tan\ \theta\ para\ -\frac{\pi}{2} < \theta\ < \frac{\pi}{2}$



b) Trace en la gráfica anterior los trozos de la función y = tan θ para:

$-\frac{3\pi}{2} < \theta\ <\ -\frac{\pi}{2}$ y $\frac{\pi}{2} < \theta\ <\ \frac{3\pi}{2}$

c) Con la ayuda de la calculadora, halle la tangente de 90°. ¿Qué sucede? ¿Cuál es la razón por la cual la calculadora da ese resultado?

Guía de autoestudio

A continuación, se proponen las siguientes actividades para que realice su autoestudio.

a) Investiga en qué campos de las ciencias se aplican las funciones trigonométricas.

b) Trace en la gráfica anterior los trozos de la función $y = tan\,\theta$ para: $-\frac{5\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$

Encuentro 6:

Ley del Seno

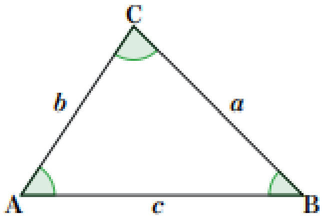
- Expresión de la ley del seno
- Cálculo de la medida del lado o de un ángulo de un triángulo, mediante ley del seno

Estimado estudiante, en este encuentro estudiaremos la ley del seno aplicada en la resolución de situaciones en diferentes contextos.

A continuación, te presentamos información relacionada al contenido en estudio para que la leas y analices cada uno de los ejemplos desarrollados.

Ley del seno

Dado el ΔABC, con ángulos interiores A, B y C y lados opuestos a cada ángulo a, b y c, respectivamente. Entonces:



$$\frac{a}{senA} = \frac{b}{senB} = \frac{c}{senC}$$

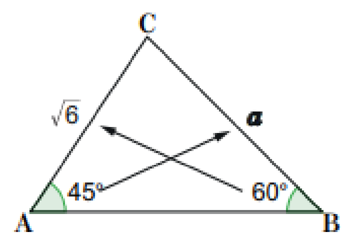
Es decir, en un triángulo cualquiera, la longitud de cada lado es directamente proporcional al seno del ángulo opuesto a dicho lado. Aquí se aplica esta ley conociendo dos ángulos y un lado cualquiera.

Si observamos el teorema de los senos está formado por proporciones y como en toda proporción, si conocemos tres de sus términos, entonces, podemos determinar el valor del cuarto término, concluimos que podemos aplicar el teorema de los senos cuando se conocen:

- Dos ángulos y el lado opuesto a uno de ellos.
- Dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos.
- Dos ángulos y uno cualquiera de los lados

Ejemplo 1. Dado el ΔABC, con $b = \sqrt{6}$, $\measuredangle A = 45°$ y $\measuredangle B = 60°$.

Determine la longitud a del lado $\overline{BC}$.



Solución

En este caso aplicaremos la ley del seno conociendo dos ángulos y un lado cualquiera.

Por la ley del seno tenemos: $\frac{a}{senA} = \frac{b}{senB}$

El lado $\overline{BC} = a$

Sustituimos los valores conocidos en la expresión anterior: $b = \sqrt{6}$, $\measuredangle A = 45°$ y $\measuredangle B = 60°$.

$$\frac{a}{sen45°} = \frac{\sqrt{6}}{sen60°}$$

Despejamos a:

$$a = \left(\frac{\sqrt{6}}{sen60°}\right)(sen45°) = \left(\frac{\sqrt{6}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right) sen45° = \sqrt{6}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

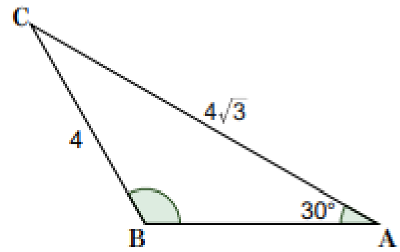
$$\text{sen } 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{sen } 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$a = \sqrt{6}\left(\frac{2}{\sqrt{6}}\right) = 2$$

Respuesta: el lado $\overline{BC}$ tiene una longitud de 2 unidades.

Ejemplo 2. Dado el ΔABC, con $b = 4\sqrt{3}$, $\measuredangle A = 30°$ y $a = 4$. Determine la medida del ángulo B opuesto al del lado $\overline{AC}$.



Al sustituir $b = 4\sqrt{3}$, $\measuredangle A = 30°$ y $a = 4$ en la igualdad

$$\frac{4}{sen30°} = \frac{4\sqrt{3}}{senB}$$

$$senB = \frac{4\sqrt{3}(sen30°)}{\mathbf{4}}$$ **,** simplificamos el 4

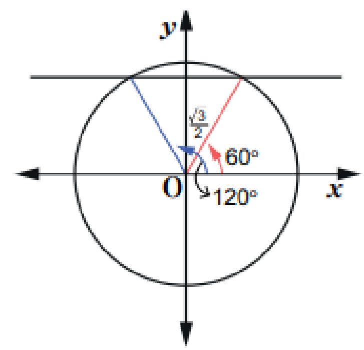
$$\text{sen } 30° = \frac{1}{2}$$

$$senB = (\sqrt{3})\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\text{sen } 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{sen } 120° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

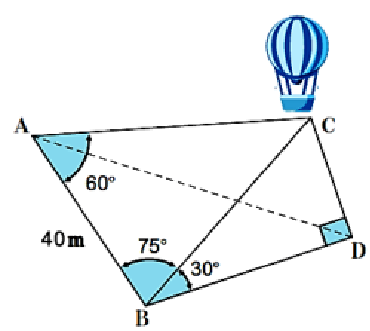
$$senB = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$



De donde $\measuredangle B = 60°$ o $\measuredangle B = 120°$. Pero, de acuerdo con la figura $90° < \measuredangle B < 180°$.

De lo que concluimos que $\measuredangle \boldsymbol{B} = \mathbf{120°}$.

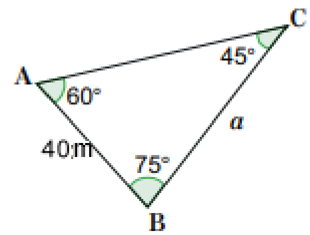
Ejemplo 3. Dos observadores A y B, se encuentran a 40 m entre sí, ven un globo, pero con los ángulos que se muestran en la figura. Determine la altura CD a la que se encuentra el globo.



Solución

Para determinar la altura CD, primeramente, encontraremos el valor del lado BC, ya que no tenemos suficiente información en el ΔBCD.

En el $\Delta ABC, \measuredangle A + \measuredangle ABC + \measuredangle ACB = 180°$



Se sustituye $\measuredangle A = 60°$ y $\measuredangle ABC = 75°$ para obtener:

$60° + 75° + \measuredangle ACB = 180°$

$$\measuredangle ACB = 180° - (60° + 75°) = 45°$$

Sea "a" la distancia desde el observador B hasta el globo.

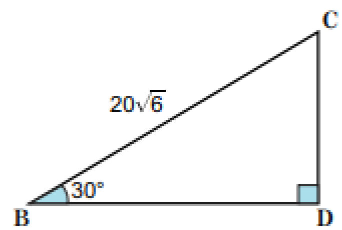
Aplicando la ley del seno en el ΔABC, se obtiene:

$$\frac{a}{sen60°} = \frac{40}{sen45°}$$

De donde:

$$a = \left(\frac{40}{sen45°}\right)(sen60°)$$

$$a = \left(\frac{40}{\frac{1}{\sqrt{2}}}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \left(40 \div \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$



$$a = 40(\sqrt{2})\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$a = 20\sqrt{6}$$

Como el ΔBDC es triángulo rectángulo, entonces la altura CD del globo es

$$CD = a(sen30°) = (20\sqrt{6})\left(\frac{1}{2}\right) = 10\sqrt{6}$$

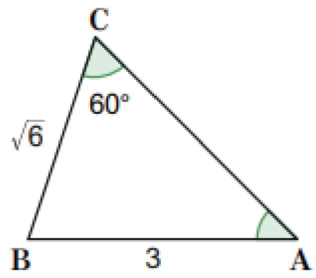
Respuesta: la altura CD a la que se encuentra el globo es $10\sqrt{6}m$

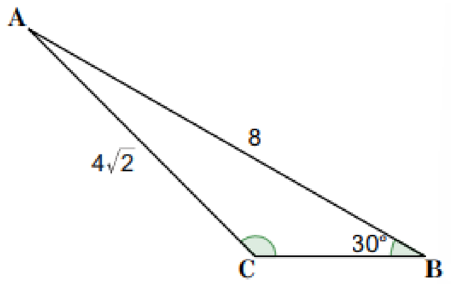
Resuelve los siguientes problemas aplicando la ley del seno

1- Dados los siguientes triángulos, determine:

a) La medida del ángulo A

b) La medida del ángulo C

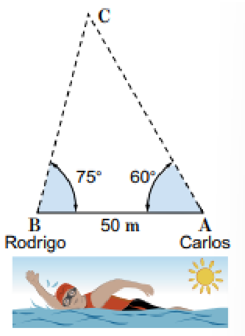




Guía de autoestudio

A continuación, se proponen las siguientes actividades para que realice su autoestudio.

Resuelve el siguiente problema aplicando la ley del seno



Carlos, un salvavidas de San Juan del Sur, ubicado en el punto A, observa a un nadador ubicado en el punto C que pide auxilio con un ángulo de 60°, y Rodrigo, un salvavidas ubicado en el punto B, lo observa con un ángulo de 75°. Si ambos están separados a una distancia de 50 m, ¿qué distancia tiene que recorrer Rodrigo para rescatarlo?

Encuentro 7:

Ley del Coseno

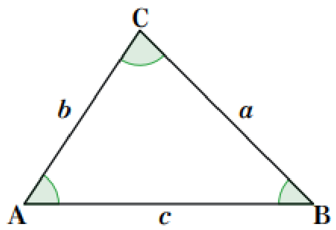
- Expresión de la ley del coseno
- Cálculo de la medida del lado o de un ángulo de un triángulo, mediante ley del coseno

Estimado estudiante, en este encuentro estudiaremos la ley del coseno aplicada en la resolución de situaciones en diferentes contextos.

A continuación, te presentamos información relacionada al contenido en estudio para que la leas y analices cada uno de los ejemplos desarrollados.

Ley del coseno

En un ΔABC, con ángulos interiores A, B y C y lados opuestos a cada ángulo a, b y c, respectivamente, se cumple que:



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

Es decir, en un triángulo cualquiera, el cuadrado de la longitud de cada lado es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados menos el doble producto de estos por el coseno del ángulo comprendido entre ellos.

De las igualdades anteriores podemos deducir, que el teorema de los cosenos se aplicará, cuando se conozcan:

a) Dos lados de un triángulo y el ángulo comprendido.

b) Los tres lados del triángulo.

Para una mejor comprensión analice los siguientes ejemplos.

Ejemplo 1. Dado el ΔABC, con $c = 3\sqrt{3}$, $\measuredangle A = 30°$ y $b = 5$, determine la longitud a del lado $\overline{BC}$

Solución

Por la ley del coseno, $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\,cos\,A$

. Se sustituye b = 5, $c = 3\sqrt{3}$ y ∡A = 30° en la expresión anterior, para obtener

$$a^2 = 5^2 + (3\sqrt{3})^2 - 2(5)(3\sqrt{3})cos30°$$

$$a^2 = 25 + 27 - 2(5)(3\sqrt{3})\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

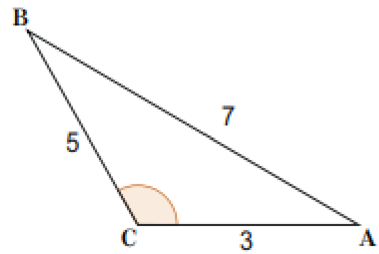
$$\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$a^2 = 25 + 27 - 45$$

$$a^2 = 7$$

Por tanto, $a^2 = 7$. Como $a > 0$, entonces $\boldsymbol{a} = \sqrt{\mathbf{7}}$

Ejemplo 2. Dado el ΔABC, con $a = 5, b = 3\ y\ c = 7$. Determine la medida del ángulo C opuesto al del lado $\overline{AB}$.



Solución

Por la ley del coseno: $\boldsymbol{c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C}$

Despejamos cos C, ya que queremos encontrar el ángulo C

$$\boldsymbol{\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}}$$

Al sustituir $a = 5, b = 3\ y\ c = 7$ en la igualdad

$$\boldsymbol{cos\ C} = \frac{\mathbf{5^2+3^2-7^2}}{\mathbf{(2)(5)(3)}}$$

$$\boldsymbol{cos\ C} = \frac{\mathbf{25+9-49}}{\mathbf{30}}$$

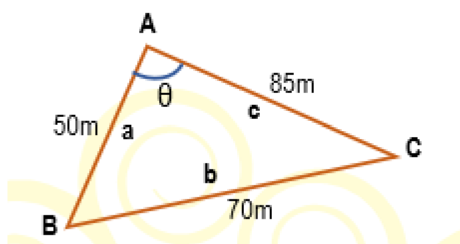
$$\boldsymbol{cos\ C} = \frac{\mathbf{-15}}{\mathbf{30}} = -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$$

$$\cos 120° = -\frac{1}{2}$$

$$\cos 240° = -\frac{1}{2}$$

De donde $\measuredangle C = 120°\ o\ \measuredangle C = 240°$. Pero $\measuredangle C = 240°$ es imposible, porque la suma de las medidas de los ángulos interiores de un triángulo es igual a 180°. Así que **∡C=120°.**

Ejemplo 3. En una parcela, se instalarán tres aspersores $(a,\ b,\ c)$ conectados por tuberías. Las distancias entre ellos son: AB=50m, AC=70m y BC=85 ¿Qué ángulo (θ) se forma en el aspersor "a" para ajustar el alcance del agua?



Solución

Por la ley del coseno: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\ cos\ A$

Despejamos cos A, ya que queremos encontrar el ángulo A= θ

$$cos\ \theta = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

Sustituimos los valores correspondientes

$$cos\ \theta = \frac{50^2+70^2-85^2}{2(50)(70)}$$

$$\cos\theta = \frac{2\,500+4\,900-7\,225}{2(50)(70)} = \frac{175}{7\,000}$$

$$cos\theta = 0{,}025$$

Despejamos θ aplicando la función inversa del coseno $\left(cos^{-1}\right)$, con ayuda de la calculadora

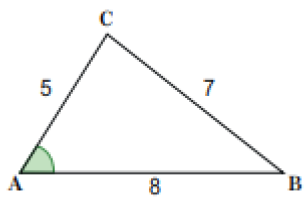
$$\theta = cos^{-1}(0{,}025)$$

$$\theta = 88{,}56°$$

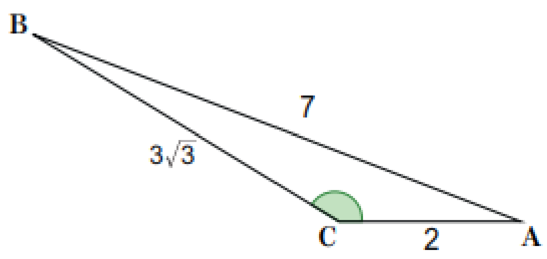
Respuesta: el ángulo en el aspersor "a" debe de ser de $88{,}56°$ para cubrir el área.

Resuelve los siguientes problemas aplicando la ley del coseno

a) La medida del ángulo A



b) La medida del ángulo C

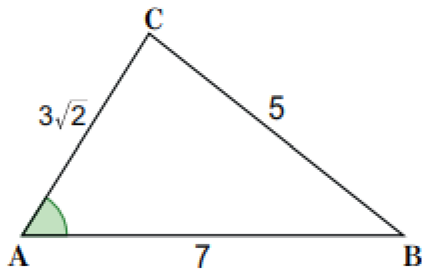


Guía de autoestudio

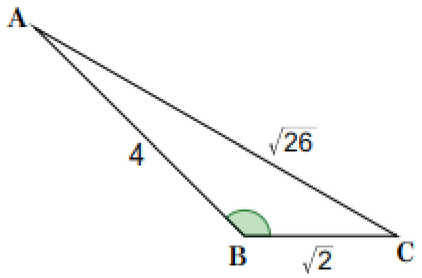
A continuación, se proponen las siguientes actividades para que realice su autoestudio.

1- Dados los siguientes triángulos, determine:

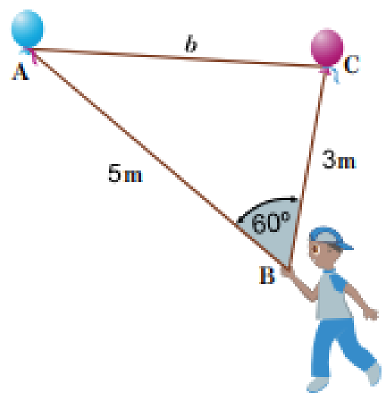
a) La medida del ángulo A



b) La medida del ángulo B



2- Rodrigo sostiene dos globos con dos cuerdas, una de longitud 5 metros y la otra de 3 metros. Si el ángulo que se forma entre ambas cuerdas es de 60º. ¿A qué distancia se encuentra un globo respecto al otro?



Encuentro 8:

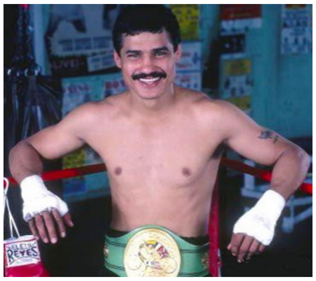
Conceptos Básicos de Estadística

- Conceptos fundamentales: Población, muestra y variable (cualitativa, cuantitativa - continua, discreta).

Estimados estudiantes, iniciaremos el estudio de una nueva unidad que corresponde a Estadística. En este encuentro trataremos los conceptos básicos de la estadística aplicados en la solución de situaciones de su entorno.

A continuación, se te presenta información relacionada al contenido en estudio para que la lea y analice cada uno de los ejemplos desarrollados.

Iniciemos analizando un caso que nos introducirá en el ámbito de la estadística



Hasta la fecha, Nicaragua a producido 15 campeones mundiales de boxeo en distintas categorías, en siguiente tabla observamos el historial de peleas y resultados de 5 de ellos.

Nombre y Apellido	Peleas Total	Victorias Ganadas	Nocaut	Empates	Derrotas
Alexis Arguello	85	77	62	0	8
Román González	56	52	41	0	4
Rosendo Alvares	43	37	4	2	4
Ricardo Mayorga	45	32	26	1	12
Luis Pérez	32	27	17	0	5

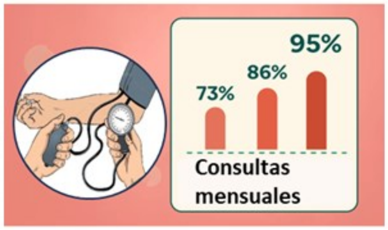
La tabla resume el total de peleas realizada por cada uno de ellos, las peleas que ganaron y los nocauts logrados y también indica las derrotas que les propinaron sus rivales, a la fecha el boxeador Román González sigue activo, por lo tanto, su récord puede variar.

En este resumen **estadístico** apreciamos la importancia de esta ciencia en el procesamiento de datos. Introduzcámonos en el estudio de la estadística.

Conceptos básicos de estadística

Entendemos como **Estadística** a la ciencia, que se encarga de recoger, analizar e interpretar datos, obtenido información valiosa, objetiva y confiable que ayudan a tomar decisiones informadas y minimizar el riesgo de errores y equivocaciones, utilizando técnicas, métodos y procedimientos propios de esta ciencia.

La estadística sirve como herramienta a muchas ámbitos y ciencias, en los distintos campos del saber, tales como: biología, economía, demografía y sectores del quehacer humano, como agropecuario, medicina, educación y otros.



Un estudio estadístico se realiza analizando el comportamiento de algún suceso o característica en un grupo de personas u objetos, al que llamamos **población**, es decir.

1) Población - concepto

La **población** es el conjunto de todos los elementos, individuos, objetos, o eventos que comparten una característica común observable y son de interés para un estudio o investigación, del cual se extrae información o se realizan mediciones. La población puede ser *finita* o *infinita*. (se denomina **individuo** a cada uno de los elementos de una población)

Por ejemplo, si queremos saber cuáles son las asignaturas preferidas de los estudiantes del centro educativo, entonces la población serán todos los estudiantes de centro.

La población es **finita** cuando el número de los elementos que la integran es conocido por el investigador, por ejemplo, en las preferencias de las asignaturas por parte de los estudiantes, porque conocemos la cantidad de ellos que tiene el centro.

La población es **infinita** cuando no se conoce el número de elementos que la componen, porque es muy grande o porque se sabe que existe, pero no se conoce su tamaño, ejemplos de ellos es el número de estrellas que existen en el universo, o la cantidad de vueltas completas que dará la rueda trasera de la bicicleta de Arturo durante toda su vida útil.

Ejercicio: Realice el siguiente ejercicio para fortalecer el aprendizaje adquirido.

En la siguiente lista de situaciones, clasifique las poblaciones en finita o infinita marcando con una "X" el tipo correcto.

- Jonrones conectados durante el campeonato nacional de béisbol Germán Pomares Ordóñez 2024: ___ finita; ____ infinita
- Granos de arroz recolectados durante la cosecha 2023: ___ finita;____ infinita
- Bacterias que viven en una persona: ___ finita; ____ infinita
- Personas que están viajando en autobuses en este momento por todo el país:

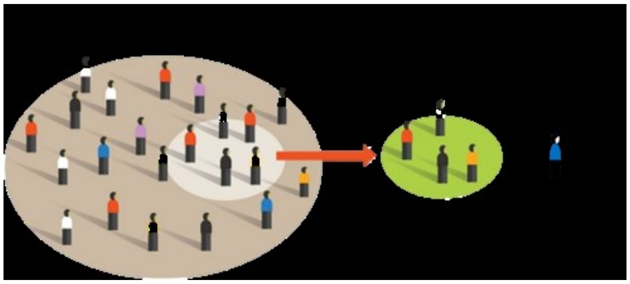
  ___ finita; ____ infinita
- Pollos de engorde de una granja avícola: ___ finita; ____ infinita

En aquellos casos que el tamaño de la población es demasiado grande o se encuentran muy dispersos para incluir a todos los individuos en el estudio estadístico, se investiga una parte de ella denominada muestra.

2) Muestra – concepto

La **muestra** estadística es una porción representativa de una población que permitir observar las características del conjunto que se está analizando, con el fin de conocer y determinar aspectos de interés de dicha población.

Por Ejemplo, en agricultura se toman muestras de suelo de diferentes áreas del campo para evaluar su fertilidad porque no es posible evaluar toda el área.



A cada uno de los valores analizados en el estudio estadístico, se le denomina "dato", por ejemplo, la cantidad de victorias de cada boxeador.

La tabla resumen de los récords de los boxeadores nicaragüenses, expresa los datos sobre el comportamiento de "variables" como el puntaje obtenido o los partidos jugados por cada selección. Veamos que es una variable

3) Variables estadísticas – tipos

Una **variable estadística** es una característica observable de interés para ser estudiada, la cual puede cambiar y cuyo cambio o variación es representado por un dato. Las variables se clasifican como cualitativas o cuantitativas:

- **Variable cualitativa:** Hace referencia a características o cualidades que no pueden ser medidas con números. Ejemplos: el color de ojos, el color de pelo o las

La familia de los grandes felinos es una variable cualitativa

profesiones de las personas. A su vez las variables cualitativas se dividen en *nominales* y *ordinales.*

Las variables cualitativas **nominales** expresan una cualidad o característica y no admiten ningún orden jerárquico.

Por ejemplo, las razas de los perros, cuyos "valores" son *chihuahua, labrador, pastor belga*, entre otros, no existen criterios para ordenarlos.

Las variables cualitativas **ordinales** son aquellas que indican atributos o cualidades, que se expresan con palabras y cuyas categorías se ordenan jerárquicamente. Por ejemplo: La calificación de un producto, como muy malo, malo, regular, bueno, muy bueno y excelente.

- **Variable cuantitativa:** este tipo de variables se expresan mediante un número. Ejemplos: la altura de una persona en centímetros o el área de los huertos escolares. Las variables cualitativas se dividen en dos tipos: *discretas* y *continuas*

  Se denominan variables cuantitativas **discretas**, aquellas cuyos valores se expresan con números enteros. Por ejemplo: La cantidad de árboles que hay en una reserva ecológica, por ejemplo 6761 o 15 629 o la cantidad de estudiantes en un aula de clases, entre otros.

  Los datos de las variables cuantitativas **continuas** adquieren una cantidad infinita de valores. Por eso, además de expresarse con números enteros, también se representan con números decimales o con fracciones. Por ejemplo: El peso de

La rapidez es una variable cuantitativa

  un toro cuyos valores pueden ser 437,25 kg, o con mayor exactitud 437,2504 kg, o 437,250 478..., etc.

***Ejercicio*:** En la siguiente lista de situaciones, clasifique las variables en cualitativa o cuantitativa, escriba una "X" en el tipo correspondiente.

- Temperatura promedio de la región a lo largo del día.

Cualitativa: ___ nominal, ___ ordinal; Cuantitativa: ____ discreta, ____ continua

- Especies de animales utilizados como mascota

Cualitativa: ___ nominal, ___ ordinal; Cuantitativa: ____ discreta, ____ continua

- Escala de calificaciones escolares (AA, AS, AF, AI)

Cualitativa: ___ nominal, ___ ordinal; Cuantitativa: ____ discreta, ____ continua

- Estado civil de las personas (soltero, casado, divorciado, viudo)

Cualitativa: ___ nominal, ___ ordinal; Cuantitativa: ____ discreta, ____ continua

- Cantidad de litros de leche vendidos en una semana

Cualitativa: ___ nominal, ___ ordinal; Cuantitativa: ____ discreta, ____ continua

***Ejercicio*:** En cada uno de los siguientes problemas determine población, muestra y variable y clasifique cada una de ellas de acuerdo a sus características.

- ***Problema propuesto*:** Juana María realiza un estudio de mercado para determinar los tipos de pan que los habitantes de su pueblo prefieren consumir, consultando entre pan simple, pan dulce, pan integral y pan de coco, preguntando a 87 personas seleccionadas de manera aleatoria.
  - *Respuestas*:

  Población: total de habitantes del pueblo, tipo **finita** (se dispone del censo poblacional)

  Muestra: 87 personas exploradas; (porque la población del pueblo es grande)

  Variables: los tipos de panes, (cualitativa - nominal**)**.

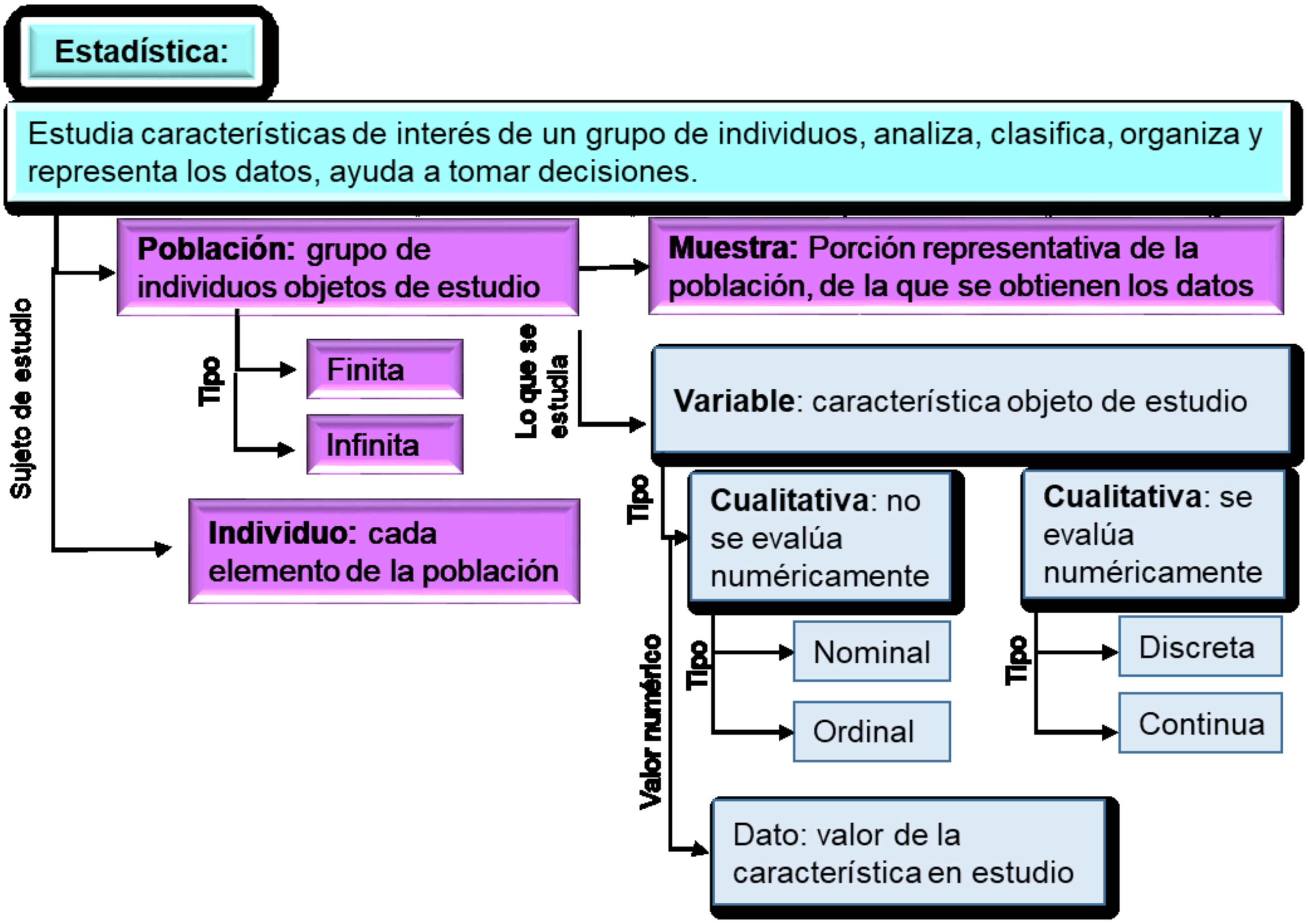
- ***Problema propuesto***: Se realiza un estudio para determinar la cantidad de hijos por familia en un departamento determinado, consultando a un total de 68 familias.
    - *Respuestas*:

  Población: las familias de todo el departamento (tipo finita);**Muestra**: 68 familias investigadas;**Variables:** número de hijos por familia (cuantitativa discreta)

- ***Problema propuesto:*** En el centro educativo se realizó investigación sobre la altura de los estudiantes de séptimo a noveno grado.
    - *Respuestas*:

  Población: Estudiantes de séptimo a noveno grado del centro; **Muestra:** se investigó a toda la población; **Variables**: altura de los estudiantes (cuantitativa, continua)

A) cuadro resumen



Guía de autoestudio

1- En cada uno de los siguientes problemas determine población, muestra y variable y clasifique cada una de ellas de acuerdo a sus características.

a) En una panadería, para determinar que la producción cumple con las especificaciones, miden el peso de 37 de los panes tipo molde que elaboran cada día.

b) Se escogieron de manera aleatoria a 63 estudiantes de un centro educativo de Secundaria a Distancia en el Campo y se les preguntó sobre la distancia que recorren para llegar a clases cada sábado.

c) Con el propósito iniciar un emprendimiento sobre venta de frutas, Antonia realiza una encuesta sobre las frutas preferidas de las personas.

d) Para calcular la estatura promedio de los estudiantes del centro educativo, se miden a 28 estudiantes que fueron elegidos aleatoriamente.

e) En el centro educativo se implementarán hasta 5 tipos distintos de deportes, para lo cual se pregunta a todos los estudiantes sobre su deporte favorito.

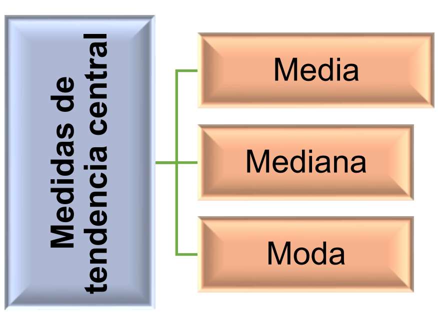
2- Los datos obtenidos como resultados en toda investigación deben analizarse, para lo cual se organizan y se realizan cálculos que nos proporcionan algunos parámetros que permiten su interpretación, entre ellos tenemos las "medidas de tendencia central": media, mediana y moda.

Investiga sobre ellas y responde las siguientes preguntas:

a) ¿Como se calcula la media aritmética de un grupo de datos no agrupados?

b) ¿Cuál es el proceso para determinar la mediana de un grupo de datos impares no agrupados?

c) ¿Cuál es el valor que se considera como la moda en grupo de datos no agrupados?



Encuentro 9:

Organización de datos mediante ordenamiento y agrupación.

- Tablas de categoría,
- Gráficos de barra
- Frecuencia absoluta (fi)
- Tabla de frecuencia relativa y porcentual.

Estimados estudiantes, en este encuentro trataremos las tablas de categorías y de frecuencia, los gráficos estadísticos y las medidas de tendencia central para datos no agrupados, en la solución de situaciones de su entorno.

A continuación, se te presenta información relacionada al contenido en estudio para que la lea y analice cada uno de los ejemplos desarrollados.

Tablas de categorías: Organizar y visualizar datos

En el ámbito de la estadística, las tablas son fundamentales para organizar y visualizar datos, se utilizan para presentar y analizar información numérica de manera clara, concisa. y accesible, facilitando la comparación y comprensión de la evolución de las variables. Las tablas estadísticas ofrecen información precisa y confiable para tomar decisiones basadas en evidencia sólida

Construya una tabla de resultados de la investigación mencionada a continuación:

- Juana María realiza un estudio de mercado para determinar los tipos de pan que los habitantes de su pueblo prefieren consumir, consultando entre pan simple, pan dulce, pan integral y pan de coco, preguntando a 87 personas seleccionadas de manera aleatoria.

En este caso determinamos que la población es finita pero muy grande como para consultarla toda, por tanto, se utilizó una muestra para realizar la investigación, visualicemos los resultados organizándolos en una tabla.

Tipo de pan	**Conteo**	**Cantidad de personas**
Pan simple	~~////~~ ~~////~~ ~~////~~ ~~////~~ ///	23
Pan dulce	~~////~~ ~~////~~ ~~////~~ ~~////~~ ~~////~~ ~~////~~ ~~////~~ ~~////~~ ////	44
Pan integral	~~////~~ //	7
Pan de coco	~~////~~ ~~////~~ ///	13
Total		**87**

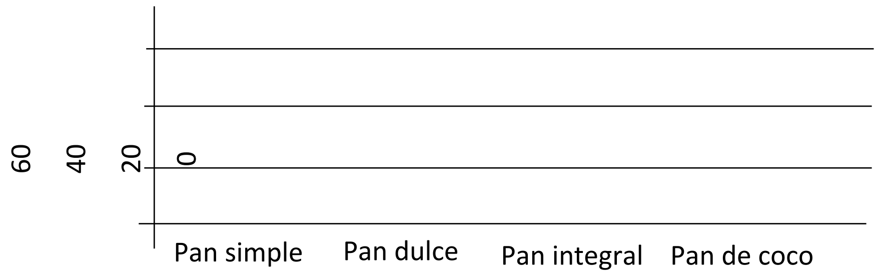
Algunas de las conclusiones que Juana María puede obtener de los resultados presentes en la tabla de distribución son las siguientes:

- El pan dulce es el tipo que más gusta
- El pan integral es el prefiere la menor cantidad de personas.
- Si sumamos entre si los resultados del pan dulce y el pan integral obtenemos que 67 de las 87 personas prefieren estos dos tipos de panes, eso representa más de tres veces el número de personas que prefieren y el pan integral y el de coco juntos.

Los datos organizados en la tabla también podemos representarlos gráficamente a través de distintos tipos de diagramas, para este caso emplearemos un gráfico de barras. El proceso para construirlo es el siguiente:

- Podemos ubicarnos en un plano de ejes rectangulares "x" y "y". En el eje "x" (eje horizontal) escribimos los valores de la variable, en este caso es del tipo cualitativa, por tanto, corresponderá a la clasificación de los panes. Es importante que estén separadas la misma distancia una de la otra.

- El eje "y" (eje vertical) lo dividimos en partes, el máximo valor deberá ser un poco mayor al máximo de respuestas obtenidas en la encuesta, el resto serán valores menores que decrezcan en la misma medida hasta llegar a cero.



- A continuación, dibujar las barras rectangulares, todas ellas deberán tener el mismo ancho, la altura corresponderá a los valores obtenidos por cada variable, comparándolos con las cantidades que se ubicaron en el eje horizontal. Es importante que la separación entre ellas sea la misma.

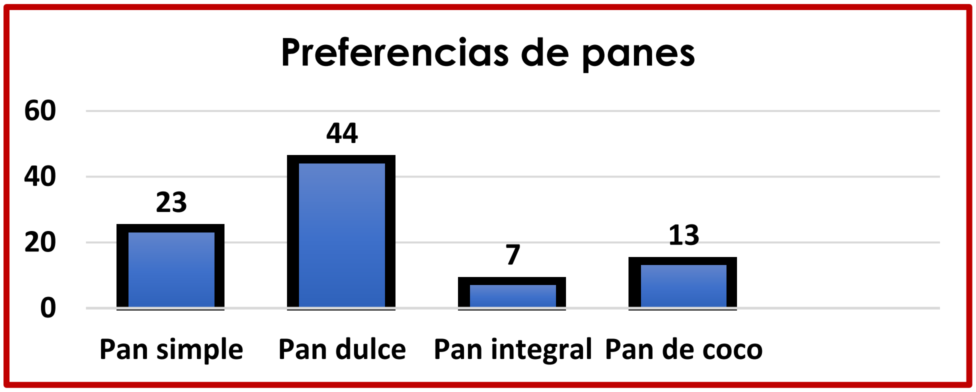
El gráfico contiene la información que refleja la tabla, de tal manera que es conveniente incluir en el diagrama los datos obtenidos en la encuesta para cada valor de la variable, o sea la cantidad de personas que prefieren cada tipo de panes.

- *Respuestas*:

Población: total de habitantes del pueblo, tipo **finita** (se dispone del censo poblacional)

Muestra: 87 personas exploradas; (porque la población del pueblo es grande)

Variables: los tipos de panes, (cualitativa - nominal**)**.



Tablas de frecuencias.

Variables: los tipos de panes, (cualitativa - nominal**)**.

En una **tabla de frecuencias** se muestra de forma ordenada un conjunto de datos estadísticos y a cada uno de ellos le asigna una **frecuencia** que, en pocas palabras, son las veces que se repite un número o dato. La tabla anterior se considera una tabla de frecuencias.

Se pueden utilizar las tablas de frecuencias para ordenar variables cuantitativas o cualitativas.

Tipos de frecuencias

Frecuencias absolutas (f_i): son el número de veces que se repite un número en un conjunto de datos.

Frecuencias absolutas acumuladas (F_i): es la suma de las frecuencias absolutas.

Frecuencia relativa (f_r): corresponde a las veces que se repite un número en un conjunto de datos respecto al total, pero se expresa en porcentajes (%).

Frecuencia relativa porcentual $(f_i\%)$: es la suma de las frecuencias relativas.

Construcción de una tabla de frecuencias

Utilizando los resultados de la investigación sobre las preferencias de tipos de panes, elaboremos una tabla que muestra los resultados en diferentes tipos de frecuencias

Para construir la tabla vamos a dar nombres a cada columna de la tabla

El "tipo de pan" es la "variable" que se investigó

La preferencia de los entrevistados, es decir la cantidad de personas que prefiere cada tipo de pan es la "frecuencia absoluta" y la suma de todas las frecuencias la denominamos "frecuencia total" y la designamos con una "N"

Tipo de pan	**Frecuencia absoluta (f_i)**	**Frecuencia acumulada**	**Frecuencia relativa**	**Frecuencia porcentual**
Pan simple	23			
Pan dulce	44			
Pan integral	7			
Pan de coco	13			
Frecuencia Total (N)	**87**			

A la **tabla de frecuencias** absolutas, se puede agregarle una columna más para calcular la **frecuencia absoluta acumulada**. Sus valores se obtienen sumando los datos en diagonal.

Tipo de pan	**Frecuencia absoluta (f_i)**	**Frecuencia acumulada (F_i)**	**Frecuencia relativa (f_r)**	**Frecuencia porcentual**
Pan simple	23	23		

Pan dulce	44	67		
Pan integral	7	74		
Pan de coco	13	87		
Frecuencia Total (N)	**87**			

La **frecuencia relativa** expresa la fracción (en términos de decimal) que cada una de las frecuencias absoluta representa con respecto a la frecuencia total, así:

Frecuencia relativa del pan simple: $\frac{23}{87} = 0{,}264$ (redondeamos hasta el tercer decimal).

Frecuencia relativa del pan dulce: $\frac{44}{87} = 0{,}506$

Frecuencia relativa del pan integral: $\frac{7}{87} = 0{,}080$

Frecuencia relativa del pan de coco: $\frac{13}{87} = 0{,}149$

Tipo de pan (variable)	**Frecuencia absoluta** (f_i)	**Frecuencia acumulada** (F_i)	**Frecuencia relativa** (f_r)	**Frecuencia porcentual** $(f_i\%)$
Pan simple	23	23	0,264	
Pan dulce	44	67	0,506	
Pan integral	7	74	0,081	
Pan de coco	13	87	0,149	
Frecuencia Total (N)	**87**		**1,000**	

Frecuencia relativa porcentual: Los resultados también podemos expresarlos en términos del porcentaje que cada uno de los resultados representa del total de la frecuencia acumulada, se calcula dividiendo la frecuencia de cada variable entre la frecuencia total y multiplicando por cien. El primer paso ya se realizó puesto que calculamos la frecuencia relativa, ahora solamente debemos multiplicar los resultados anteriores por cien.

Tipo de pan (variable)	**Frecuencia absoluta** (f_i)	**Frecuencia acumulada** (F_i)	**Frecuencia relativa** (f_r)	**Frecuencia porcentual** $(f_i\%)$
Pan simple	23	23	0,264	26,4
Pan dulce	44	67	0,506	50,6
Pan integral	7	74	0,081	8,1
Pan de coco	13	87	0,149	14,9
Frecuencia Total (N)	**87**		**1,000**	**100**

Guía de autoestudio

Se preguntó a 80 parejas cuál era el número de hijos que tenían, obteniendo los siguientes datos

15 parejas respondieron que no tenían hijos

30 parejas respondieron que tenían 1 hijo

25 parejas respondieron que tenían 2 hijos

10 parejas respondieron que tenían 3 hijos.

Con estos datos responde las siguientes preguntas y realiza la actividad solicitada:

¿Cuál es la variable?; ¿Qué tipo de variable es?

Construye una tabla de frecuencias y calcula la frecuencia absoluta, frecuencia acumulada, frecuencia relativa y frecuencia relativa porcentual.

Encuentro 10:

Gráficos estadísticos

- Gráficos de barras
- Histogramas
- Gráficos circulares

Estimados estudiantes, en este encuentro trataremos los gráficos estadísticos como de barras, histogramas y circulares en la interpretación de datos.

A continuación, se te presenta información relacionada al contenido en estudio para que la lea y analice cada uno de los ejemplos desarrollados.

Gráficos estadísticos

Los gráficos estadísticos son herramientas que proporcionan una clara ilustración, por medio de representaciones visuales, de datos complejos en información clara, comprensible y fácilmente analizable.

Dependiendo de la naturaleza de los datos y el mensaje que se desee comunicar, se pueden utilizar diferentes tipos de gráficos, cada uno diseñado para transmitir información de manera efectiva.

Tipos de gráficos estadísticos

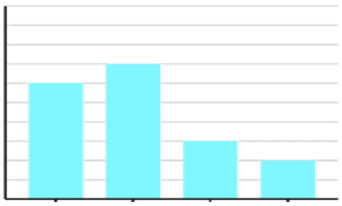
a) Diagrama de barras

En estadística, el diagrama de barras sirve para comparar la cantidad de veces que se repiten los datos de la frecuencia absoluta de una variable cualitativa o cuantitativa discreta.

Este tipo de gráfico estadístico también se puede llamar **gráfico de barras** o **gráfico de columnas**

En un gráfico de barras, las categorías se colocan en el eje horizontal (x), mientras que las magnitudes se representan en el eje vertical (y). La longitud de cada barra es proporcional al valor que representan. Esto permite comparar las magnitudes de diferentes grupos de manera visualmente clara.

En estadística, el diagrama de barras sirve para comparar la cantidad de veces que se repiten los datos de la frecuencia absoluta de una variable cualitativa o cuantitativa discreta.



Ejercicio: Las edades, en años cumplidos, de un grupo de estudiantes son las siguientes:

16, 13, 14, 15, 14, 13, 15, 14, 14, 14, 13, 15, 14, 15, 13, 16, 15, 14, 15, 13, 14, 14, 14, 16, 17, 14, 15, 13, 16, 15.

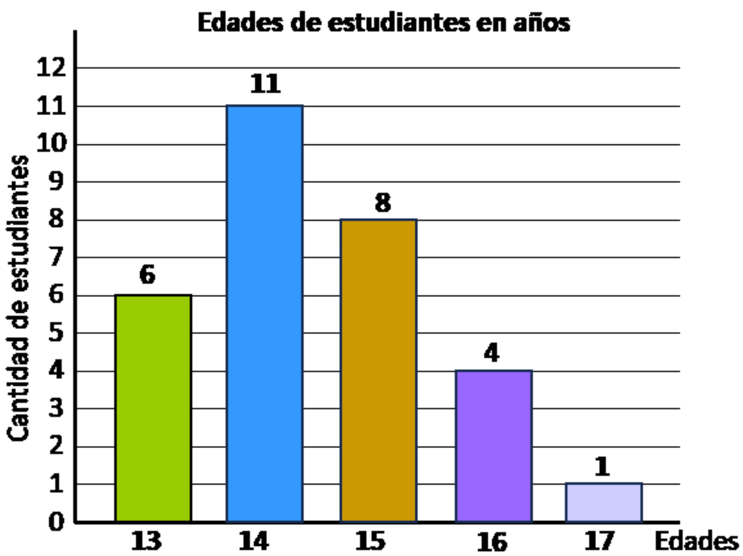
Construir un gráfico de barras que represente las edades de los estudiantes

Procedimiento.

- Ordenando los datos podemos determinar con mayor facilidad la cantidad de veces que se repite cada valor.
- Construir una tabla que nos relacione la cantidad de estudiantes por edades.

Edades en años	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**
Cantidad de estudiantes	6	11	8	4	1

- Dibujar el gráfico de barras, dividiendo el eje vertical en tantas partes como convenga, para ubicar en él la cantidad de estudiantes que se indica para cada edad. Sobre el eje horizontal levantar las barras de frecuencias (cantidad de estudiantes), recordando que deben estar separadas unas de otras, bajo el eje horizontal escribir las edades de los estudiantes.



Se observa gráficamente la relación que existe entre el número de estudiantes de las diferentes edades, destacando que la mayor cantidad de ellos tienen 14 años y la menor cantidad son estudiantes de 17 años. El total de ellos, por cada clase, se puede determinar gráficamente identificándola por la altura de cada barra en el eje vertical, pero en este caso, sobre la barra también aparece el valor.

Actividad práctica

Se realizó una encuesta entre 20 familias de la comunidad para conocer la cantidad de personas que viven en cada hogar, encontrando los siguientes resultados

7, 6, 8, 4, 5, 7, 7, 4, 6, 8, 6, 6, 5, 8, 7, 5, 6, 5, 6, 7

Construir un gráfico de barras que represente la cantidad de personas que viven en cada hogar.

b) Histograma

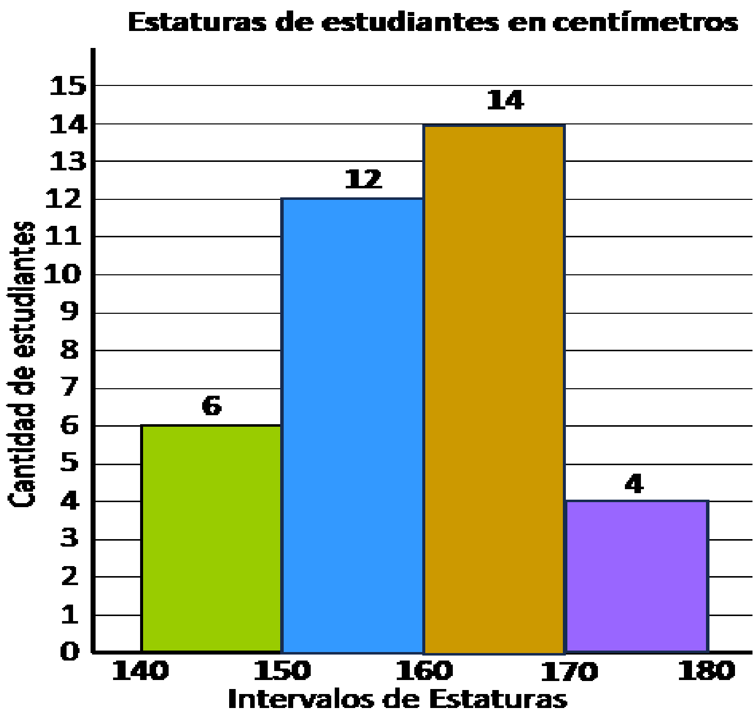
Un **histograma** también es un tipo de diagrama en el que se representa un conjunto de datos estadísticos mediante barras rectangulares, los histogramas sirven para representar gráficamente variables continuas, por lo cual las barras del diagrama están unidas, lo que ayuda a visualizar la continuidad de los datos

Cada barra de un histograma de frecuencias tiene una anchura proporcional a la anchura del intervalo y la longitud de cada barra del histograma es proporcional a la frecuencia correspondiente.

Para construir un histograma, utilizaremos los resultados del análisis de estaturas realizados con 36 estudiantes de décimo grado planteado anteriormente, ya que las medidas de longitud (en este caso estaturas) son variables continuas, para poder ver esa continuidad, unificaremos los límites superiores de la una clase anterior con el límite inferior de la siguiente clase, de forma que los datos quedarán como se muestran en la siguiente tabla.

Intervalos de estatura en cm	140 - 150	150 - 160	160 - 170	170 - 180
Cantidad de estudiantes	6	12	14	4

El proceso para dibujar el gráfico es el mismo que se emplea para el diagrama de barras, de igual manera el eje vertical contiene la frecuencia con que se repiten los datos (en este caso la cantidad de estudiantes) y en el eje horizontal los intervalos en que clasifican los datos.



Al interpretar un histograma, podemos identificar importantes características como la concentración de datos en cada uno de los intervalos, permitiendo saber dónde se ubican la mayor o menor cantidad de datos, en particular en el diagrama elaborado, observamos que la mayoría de los estudiantes tienen estaturas entre $150\ cm$ y $170\ cm$, destacando los que se encuentran entre $160\ cm$ y $170\ cm$.

c) Gráficos de sectores circulares

Un diagrama de sectores circulares, o gráfico de sectores circulares, es un tipo de diagrama estadístico en el que se representan los datos mediante un círculo dividido en sectores, de manera que el ángulo de cada sector es proporcional a la frecuencia de cada clase o categoría. El total del gráfico, que corresponde a una vuelta completa o 360^o sexagesimales representa el 100% de los datos.

Con este tipo de gráfico estadístico se pueden representar variables cualitativas o cuantitativas y estas también pueden ser continuas o discretas y se utilizan con mucha frecuencia para representar la variable como relativa porcentual.

Para construir un gráfico de sector circular, es necesario calcular el ángulo que corresponde a cada frecuencia, para lo cual se pueden utilizar diferentes procedimientos.

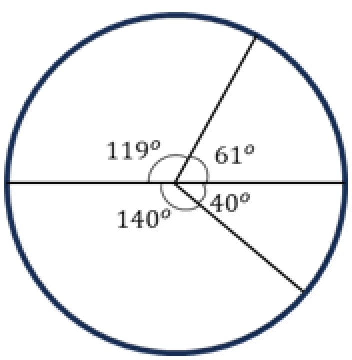
Tomemos la tabla de frecuencias de la actividad que estamos graficando, conservado la frecuencia absoluta y la frecuencia relativa

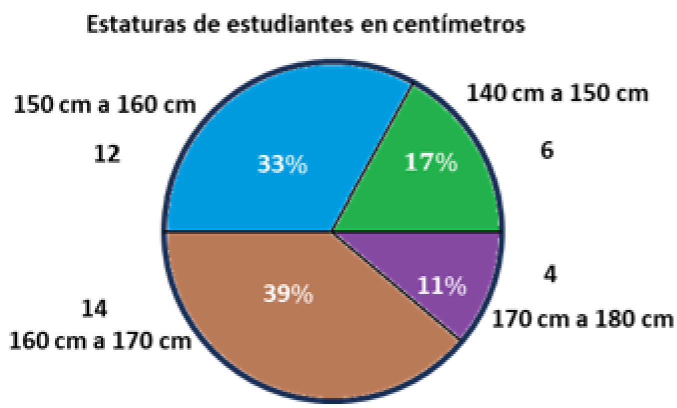
Recuérdese que se dijo que una vuelta completa, es decir 360^o , equivalen proporcionalmente al 100% de la frecuencia total, en este caso los 36 estudiantes.

Categoría Estatura (cm)	Frecuencia absoluta $(\boldsymbol{f_i})$	Frecuencia relativa $(\boldsymbol{f_r})$	Grados circunferencia	Grados de cada frecuencia
140 - 149	6	0,17	[illegible]	**61.2**
150 - 159	12	0,33	[illegible]	**118.8**
160 - 169	14	0,39	[illegible]	**140.4**
170 - 179	4	0,11	[illegible]	**[illegible].6**
Frecuencia Total $(\boldsymbol{N})$	**36**	**1**		**360**

En la tabla ya hemos identificado la proporción que la frecuencia de cada categoría representa con respecto a la frecuencia absoluta, por tanto, solamente tenemos que multiplicar esas proporciones por los 360^o , para determinar cuantos grados corresponden a cada categoría.

La primera categoría tiene una frecuencia de 6 personas, con respecto a las 36 personas de la frecuencia total representa 0,17 partes, a su vez esas 0,17 partes corresponden a $61{,}2^o$ con respecto a los 360^o.para representarlos gráficamente en un diagrama circular, medimos, con un transportador de ángulos, esa amplitud a partir de del eje horizontal que representa el diámetro de la circunferencia. A partir del lado terminal del primer ángulo se medirá el segundo y así sucesivamente hasta completar el giro completo. Debido a que de manera manual es sumamente difícil conseguir décimas de grado, lo mejor es redondear los valores de la amplitud de los diferentes ángulos. Además, esas décimas de diferencias no se aprecian visualmente.



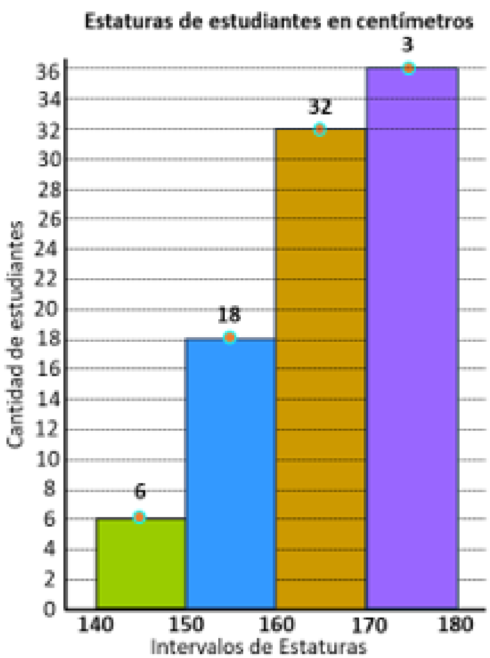


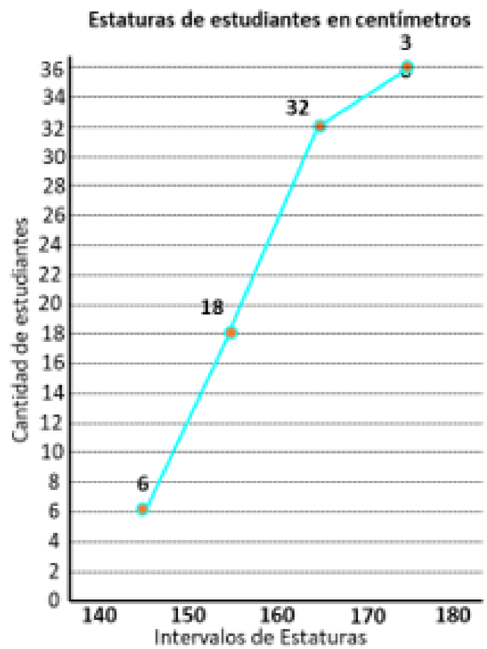
d) Ojiva

En estadística, la ojiva es un gráfico que muestra la frecuencia acumulada asociada a un conjunto de datos. Por lo tanto, la ojiva sirve para saber el número de datos que se encuentran por debajo de un valor determinado.

Para construir una ojiva, tomamos la frecuencia acumulada calculada en la tabla de frecuencias, ubicamos en el plano de ejes rectangulares, los valores de las frecuencias acumuladas en el eje vertical y la marca de clase en el eje horizontal, la intersección de ambos valores, corresponderán a los puntos de la ojiva, luego unimos los puntos y encontramos la gráfica

El gráfico de barra que se observa corresponde a la frecuencia acumulada, en el también hemos ubicado las marcas de clase de cada categoría a la altura de la frecuencia acumulada, las unimos y obtenemos la ojiva, que se muestra en el siguiente gráfico.





Actividad práctica

Un grupo de estudiantes formaron tres equipos de futbol y dieron hacer camisetas a medida:

Tallas	Cantidad de jugadores
XL	5
S	10
M	26
L	19

	60

- Represente los datos en un gráfico de sectores circulares en términos de porcentajes.
- Construya una ojiva con la frecuencia acumulada

Guía de autoestudio

1- Responda correctamente:

¿Cuáles son las diferencias entre un diagrama de barras y un histograma?

Construya un histograma con los datos contenidos en la tabla que se deriva de la situación que se describe:

En horas de la mañana, se mide la velocidad de una serie de automóviles obteniendo los siguientes resultados.

Intervalos de velocidad en $km/_h$	**20 - 30**	**30 - 40**	**40 - 50**	**50 - 60**	**60 - 70**
Cantidad de automóviles	3	7	6	9	5

2- La tabla de la derecha muestra un inventario de libros de textos de una biblioteca.

a) Complete la tabla con los valores correspondientes.

b) Construya la gráfica de sector circular

Libros	f_i	f_r%	Ángulo
Historia	210		
Literatura	280		
Matemática	70		
Química	140		
Total	700		

Encuentro 11:

Medidas de tendencia central para datos no agrupados.

- Definición y cálculo de la media aritmética, mediana y moda

Descripción

Estimados estudiantes, en este encuentro trataremos las medidas de tendencia central para datos no agrupados, en la solución de situaciones de su entorno.

A continuación, se te presenta información relacionada al contenido en estudio para que la lea y analice cada uno de los ejemplos desarrollados.

Lea detenidamente la siguiente situación y analícela

Los últimos 7 días, carolina la vaca de Alberto, le ha proporcionado las siguientes cantidades de litros (L) de lecha: 5,1; 4,8; 4; 5,1; 5; 4,6; 5,7.

Realice las actividades que se indican y responda las preguntas planteadas.

a) Ordenar los datos de forma ascendente

b) ¿Cuál es la menor cantidad de leche que, por día, produjo la vaca?

c) ¿Cuál es la mayor cantidad de leche que, por día, produjo la vaca?

d) ¿Qué dato se encuentra en el centro de todos ellos?

e) ¿Cuál es la cantidad de leche que más veces produjo la vaca?

f) ¿Cuál es el promedio de leche producido en los siete días?

Las respuestas a las preguntas propuestas ubican a los datos descritos anteriores en el campo de la **Estadística,** responderlas implica identificar algunos parámetros que utiliza esta rama en el análisis de datos para la toma de decisiones.

Demos respuestas a las preguntas

Inciso "a", ordenando los datos

En esta situación, podemos dar respuesta a la mayoría de las preguntas, la lista de datos, nos permite apreciar fácilmente ciertas características del comportamiento de la producción lechera:

- Pregunta b: la menor cantidad de leche producida en 1 día es de ***4 L**.*
- Pregunta c: la mayor producción de leche fue de **5,7 L** en un día.
- Pregunta d: Sabiendo que son 7 datos los que estamos analizando, deducimos que el dato número 4, correspondiente a ***5 L***, es el que está en el centro del ordenamiento que hicimos, siempre será el mismo si contamos los datos de izquierda a derecha o de derecha a izquierda.
- Pregunta e: También podemos identificar qué cantidad de leche producida más veces son los ***5,1 L***, obtenida dos veces.
- Pregunta f: Calculamos el promedio de leche producida en los siete días

$$\boldsymbol{Promedio} = \frac{\mathbf{4+4{,}6+4{,}8+5+5{,}1+5{,}1+5{,}7}}{\mathbf{7}} = \frac{\mathbf{34{,}3}}{\mathbf{7}} = \mathbf{4{,}9}$$

Lo cual nos indica que, en promedio Alberto obtiene 4,9 litros de leche cada día de su vaca Carolina.

Medidas de tendencia central

Con el objetivo de resumir la información, la estadística descriptiva utiliza **medidas numéricas** para resumir la información. Las principales son:

Las **medidas de tendencia central** son valores que representan, de forma aproximada, el centro o punto medio de un conjunto de datos. Es decir, indican cuál es el valor más representativo de los datos analizados.

Las medidas de tendencia central también se conocen como **medidas de centralización**.

- **Media aritmética** "$\bar{x}$" o promedio, es la suma de todos los datos dividida entre el número de estos.
- **Moda** $\boldsymbol{M_o}$ es el dato que se repite la mayor cantidad de veces el ese grupo de datos.
- **Mediana** M_e es el número que se encuentra en la posición central de un conjunto de datos, cuando están ordenados de mayor a menor o de menor a mayor.

Para determinar la mediana se lleva a cabo lo siguiente:

1. Se ordenan los datos, del más pequeño al más grande o viceversa
2. Si la cantidad de datos es impar, la $M_e$es el valor central. Si la cantidad de datos es par, la M_e es el promedio de los datos del centro.

En la situación presentada, las medidas de tendencia central son las siguientes

Media aritmética: $4{,}9\ L$

Moda: $5{,}1\ L$

Mediana: $5\ L$

Ejercicio 1

Las distancias en kilómetros que recorren un grupo de 24 estudiantes para asistir a la escuela son las siguientes: 2, 9, 7, 4, 8, 1, 10, 2, 6, 4, 10, 5, 10, 4, 8, 2, 7, 4, 4, 9, 3, 1, 3, 9.

Calcula la media aritmética y determina la mediana y la moda del grupo de datos.

Solución:

1. Ordenar los datos del número menor al número mayor

   1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 4, 6, 6, 7, 7, 8, 8, 9, 9, 9, 10, 10, 10

2. Cálculo de la media aritmética:

$$\bar{x} = \frac{1+1+2+2+2+3+3+4+4+4+4+4+5+6+7+7+8+8+9+9+9+10+10+10}{24}$$

$$\bar{x} = \frac{132}{24} = 5{,}5;$$

3. Cálculo de la mediana:

Este grupo de datos está conformado por 24 de ellos, lo que nos indica que no existe un solo dato en el medio del ordenamiento, podemos contar hasta el dato N° 12 de izquierda a derecha y luego reiniciar la cuenta en el dato N°13 y contaremos también doce datos, por lo cual la mediana será el promedio de los datos N° 12 y 13, que correspondería a los valores 4 y 5.

$$M_e = \frac{4}{5} = 4{,}5$$

4. Determinando la moda

Si observamos el ordenamiento de los datos, podemos observar que el número 4 se repita un total de cinco veces por tanto podemos decir:

$$Moda = 4$$

Respuesta:

Media aritmética = $5{,}5\ km$

Mediana = $4{,}5\ km$

Moda = $4\ km$

Guía de autoestudio

a) Durante las últimas dos semanas, se han registrado en el pueblo las siguientes temperaturas máximas en grados centígrados

32, 31, 28, 29, 33, 32, 32, 29, 30, 31, 34, 36, 33, 29

Calcular la temperatura promedio, la mediana y la moda con los datos mencionados.

b) La casa materna del pueblo brinda alojamiento a mujeres embarazadas que provienen de comunidades alejadas y se han recibido semanalmente las siguientes cantidades de embarazadas.

7, 4, 9, 3, 13, 8, 5, 2, 7, 6, 1, 7, 2, 3, 11

Calcular la media, medina y moda de los datos indicados.

Encuentro 12:

Organización de datos agrupados en tablas de distribución de frecuencia

Estimados estudiantes, en este encuentro estudiaremos las tablas de distribución de frecuencia, los gráficos estadísticos y las medidas de tendencia central para datos agrupados, en la solución de situaciones de su entorno.

A continuación, se te presenta información relacionada al contenido en estudio para que la lea y analice cada uno de los ejemplos desarrollados.

Datos agrupados

Son aquellos datos que han sido organizados en categorías o rangos. para poder estudiarlos de manera conjunta. los **datos agrupados** se clasifican en función de criterios específicos que pueden ser cualitativos o cuantitativos.

Para entender mejor los **datos agrupados**, es importante también conocer sus contrapartes, los **datos no agrupados**. Mientras que los datos agrupados ofrecen una visión general a través de categorías, los datos no agrupados presentan los números tal como fueron recopilados. Por ejemplo:

Se midieron las estaturas de los 36 estudiantes de décimo grado, obteniendo los siguientes resultados en centímetros.

163, 146, 155, 172, 147, 162, 158, 149, 148, 172, 169, 166, 156, 167, 161, 153, 170, 149, 169, 152, 165, 164, 168, 155, 157, 158, 148, 166, 163, 150, 162, 158, 168, 173, 151, 152.

Presentados en forma de una lista de números se denominan **datos no agrupados**, sin embargo, estos datos podemos organizarlos en categorías o clases definiendo intervalos de estaturas, medidas en centímetros, como las siguientes:

Intervalo	# de datos
140 a 149	6
150 a 159	12
160 a 169	14
170 a 179	4

De esta forma los datos quedaron agrupados en clases o categorías definidas por los correspondientes intervalos.

Organización de datos agrupados en tablas de distribución de frecuencia

Construyamos la tabla de frecuencias de los datos agrupados definidos anteriormente.

- Paso 1. Escribimos los intervalos de las categorías y la frecuencia de cada intervalo.
- Paso 2. Calculamos la frecuencia acumulada para cada categoría, sumando en diagonal los resultados con el dato anterior.

De $140\ cm\ a\ 149\ cm\ =\ \mathbf{6}$; de $150\ cm\ a\ 159\ cm\ =\ 6 + 12 =\ \mathbf{18}$; de $160\ cm\ a\ 169\ cm = 18 + 14 = \mathbf{32;}\ y\ de\ 170\ cm\ \ a\ 179\ cm = 32 + 4 = \mathbf{36}$

- Paso 3. Calculando la frecuencia relativa.

De $140\ cm\ a\ 149\ cm\ =\ \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{35}}\mathbf{0,14\,;}$ de $150\ cm\ a\ 159\ cm\ =\ \frac{\mathbf{12}}{\mathbf{35}} = \mathbf{0,34\,;}$ de $160\ cm\ a\ 169\ cm = \frac{17}{35} = \mathbf{0,48}$; y de $170\ cm\ \ a\ 179\ cm = \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{35}} = \mathbf{0,11}$

- Paso 4: Calculamos la frecuencia relativa ´porcentual multiplicando cada una de las frecuencias relativas por cien.

Categoría Estatura (cm)	**Frecuencia absoluta** (f_i)	**Frecuencia acumulada** (F_i)	**Frecuencia relativa** (f_r)	**Frecuencia porcentual** $(f_r\%)$
140 - 149	6	6	0,17	17
150 - 159	12	18	0,33	33
160 - 169	14	32	0,39	39
170 - 179	4	36	0,11	11
Frecuencia Total (N)	**36**		**1**	**100**

Los datos también se pueden se agrupar de acuerdo a la cantidad de veces que algunos valores específicos aparecen en el conjunto de datos, lo mismo que atendiendo a propiedades o característica comunes. Este enfoque es normalmente utilizado para datos cualitativos, en los que se categoriza la información en grupos específicos. Un ejemplo de ello es el ejercicio estudiado anteriormente sobre la agrupación de los tipos de panes preferidos, sobre los que Juana María realizó la encuesta en el pueblo.

1) Límites de clases

Obviamente al establecer intervalos conocemos la cantidad de datos que entran en cada uno de ellos.

En cada intervalo tenemos dos valores extremos denominados **límites** de clase. Se distinguen dos tipos, el **límite de clase inferior**, que marca el valor mínimo de la clase, y el **límite de clase superior**, que indica el valor máximo de la clase.

Por ejemplo,

Intervalos	Límite inferior	Límite superior
140 a 149	140	149
150 a 159	150	159
160 a 169	160	169
170 a 179	170	179

2) Ancho de clase

En estadística, el **ancho de clase** es la amplitud de una clase o intervalo. Es decir, el ancho de una clase es igual a la diferencia entre el límite superior y el límite inferior de la clase. Siguiendo con el ejemplo el ancho de cada clase será:

$149 - 140 = \mathbf{9}$; $159 - 150 = \mathbf{9}$; $169 - 160 = \mathbf{9}$; $179 - 170 = \mathbf{9}$

3) Marca de clase

Para cada clase conocemos la cantidad de datos que hay en cada una de ellas o sea la frecuencia absoluta, pero desconocemos los valores específicos de cada dato, por tanto, por tanto, debemos encontrar un valor que represente a cada uno de los datos contenidos en la clase al cual se denomina marca de clase y se representa por M_i.

la **marca de clase** es el punto medio de los límites de la clase o intervalo. Por ejemplo, la **marca de clase** por tanto en los intervalos que estamos estudiando, las marcas de clases son:

Intervalos	Marca de clase
140 a 149	$M_i \frac{140+149}{2} = \mathbf{144,5}$

150 a 159 $M_i \frac{150+159}{2} = \mathbf{154,5}$

160 a 169 $M_i \frac{160+169}{2} = \mathbf{164,5}$

170 a 179 $M_i \frac{170+179}{2} = \mathbf{174,5}$

Categoría Estatura (cm)	Marca de clase $\boldsymbol{M}_i$	Frecuencia absoluta $(\boldsymbol{f_i})$	Frecuencia acumulada $(\boldsymbol{F_i})$	Frecuencia relativa $(\boldsymbol{f_r})$	Frecuencia porcentual $(\boldsymbol{f_r}\%)$
140 - 149	144,5	6	6	0,17	17
150 - 159	154.5	12	18	0,33	33
160 - 169	164,5	14	32	0,39	39
170 - 179	174,5	4	36	0,11	11
Frecuencia Total $(\boldsymbol{N})$		**36**		**1**	**100**

Retomando la tabla de frecuencias construida anteriormente, integremos a ella sus marcas de clases

Guía de autoestudio

Responda correctamente las siguientes preguntas.

1. ¿En estadística, qué son datos agrupados?
2. Mencione los tipos de variables que pueden representarse con datos agrupados.
3. ¿Cómo se denominan los límites de cada clase en un grupo de datos agrupados?, explique el concepto de cada uno de ellos.

Construya una tabla de frecuencias con las edades en años, indicadas a continuación, de 30 pacientes que visitaron el centro de salud con problemas respiratorios durante el mes pasado.

5, 9, 5, 13, 17, 9, 13, 15, 4, 9, 13, 15, 3, 8, 11, 14, 2, 8, 11, 14, 7, 10, 14, 7, 7, 10, 14, 6, 6, 6.

Categoría Estatura (cm)	Marca de clase $\boldsymbol{M}_i$	Frecuencia absoluta $(\boldsymbol{f_i})$	Frecuencia acumulada $(\boldsymbol{F_i})$	Frecuencia relativa $(\boldsymbol{f_r})$	Frecuencia porcentual $(\boldsymbol{f_r}\%)$
2 - 6					
6 - 10					
10 - 14					
14 - 18					
Frecuencia Total $(\boldsymbol{N})$					

Nota: Los valores que coinciden con el límite superior de una categoría, agregarlos a la categoría siguiente.

Encuentro 13:

Medidas de tendencia central de datos agrupados.

- Media aritmética, moda y mediana

Estimados estudiantes, en este encuentro estudiaremos las medidas de tendencia central para datos agrupados, en la solución de situaciones de su entorno.

A continuación, se te presenta información relacionada al contenido en estudio para que la lea y analice cada uno de los ejemplos desarrollados.

Para calcular las medidas de tendencia central con datos agrupados es necesario utilizar la información de los mismos contenidos en la tabla de distribución de frecuencias.

- **Media aritmética**

La media aritmética de un grupo de datos agrupados es la suma de los productos de las marcas de clase por las frecuencias absolutas. Esta suma se divide entre el número total de datos:

Paso 1: multiplicamos la marca de cada clase por su respectiva frecuencia absoluta y sumamos los resultados

Categoría Estatura (cm)	Marca de clase $\boldsymbol{M}_i$	Frecuencia absoluta $(\boldsymbol{f}_i)$	$\boldsymbol{M}_i \times \boldsymbol{f}_i$	Frecuencia acumulada $(\boldsymbol{F}_i)$
140 - 149	144,5	6	867	5

150 - 159	154.5	12	1854	17
160 - 169	164,5	14	2303	31
170 - 179	174,5	4	698	35
Frecuencia Total (N)		**35**	**5722**	

$145{,}5 \times 6 = 867$

$155{,}5 \times 12 = 1854$

$165{,}5 \times 14 = 2303$

$155{,}5 \times 14 = 698$

Paso 2: dividimos el resultado de la suma entre la frecuencia total (número total de datos)

$\bar{x} = \frac{5722}{35} \cong 163{,}48;$

Respuesta: la media aritmética es: $\bar{x} \ \cong 163{,}48$

Por tanto, para calcular la media aritmética en una tabla de datos agrupados aplicamos la fórmula

$$\bar{x} = \frac{Suma\ de\ los\ productos\ de\ las\ marcas\ de\ clase\ por\ la\ frecuencia\ absoluta\ (\boldsymbol{M_i} \times \boldsymbol{f_i})}{número\ total\ de\ datos}$$

- **Mediana**

La mediana es la medida que se encuentra en la posición central de todos los datos, por tanto, para determinar donde se encuentra es necesario identificar en que clase está ubicada, para lo cual se realiza la siguiente operación:

Posición central = $\frac{N+1}{2}$; donde N: frecuencia total

Paso 1. Calcular la posición central

$\frac{36+1}{2} = \frac{37}{2} = \mathbf{18,5,}$ lo que indica que la mediana se ubica en la clase que contenga el dato número 18,5

Paso 2: utilizando la frecuencia acumulada descubrimos que hasta la segunda clase hay un total de 17 datos, por tanto, el dato número 18 pertenece a la tercera marca de clases, es decir al intervalo 160 – 169.

El valor aproximado de la mediana es el punto medio de la clase donde se encuentra el dato central, en este caso

$M_e = \mathbf{164,5}$

- **Moda**

Como sabemos la moda es el dato que más se repite, por tanto, la moda está contenida en la clase que tiene mayor frecuencia a la que se le denomina clase modal y el valor aproximado de la moda es la marca de clase. En el caso que estamos tratando la clase con mayor frecuencia absoluta también es la tercera, por tanto

$M_o = \mathbf{164,5}$

Guía de autoestudio

En un día de trabajo, un pescador de langostas obtuvo los siguientes ejemplares:

Peso en kg	Marca de clase $\boldsymbol{M_i}$	Frecuencia absoluta $(\boldsymbol{f_i})$	$\boldsymbol{M_i \times f_i}$	Frecuencia acumulada $(\boldsymbol{F_i})$
0,5 - 1		12		
1 – 1,5		14		
1,5 - 2		8		
2 – 2,5		3		

Frecuencia Total (N)				

Calcule la media, mediana y moda de los datos contenidos en la tabla.

Encuentro 14:

Medidas de posición de datos agrupados

- Cálculo de cuartiles

Estimados estudiantes, en este encuentro estudiaremos las medidas de posición y dispersión para datos no agrupados, en la solución de situaciones en diferentes contextos.

A continuación, se te presenta información relacionada al contenido en estudio para que la lea y analice cada uno de los ejemplos desarrollados

Medidas de posición.

Las **medidas de posición** son herramientas estadísticas que se utilizan **para dividir los datos en segmentos iguales** que permiten organizarlos y analizarlos para facilitar su comprensión.

Los cuartiles son los tres valores que dividen a un conjunto de datos ordenados en cuatro partes iguales. Cada cuartil corresponde a un valor específico al cual corresponde cierto porcentaje de los datos. Por lo tanto, al primer pertenecen el 25% de los datos, el segundo el 50% y corresponde también a la mediana y el tercer cuartil representa el 75% del conjunto de datos estadísticos. Los cuartiles se denotan como: Primer cuartil $\boldsymbol{Q_1}$; Segundo cuartil $\boldsymbol{Q_2}$; tercer cuartil $\boldsymbol{Q_3}$

Los cuartiles se pueden obtener de dos formas, de manera visual o aplicando fórmulas, antes de obtenerlos es necesario que los datos estén ordenados de menor a mayor

Ejemplo.

Los siguientes datos corresponden a la cantidad de huevos que Rosaura recogió diariamente de su gallinero en los últimos días:

15, 17, 17, 16, 15, 17, 15, 18, 14, 16, 15

Contando los datos encontramos que tenemos un total de once datos.

Para determinar los valores que corresponde a cada cuartil, el primer paso es organizar los datos de manera ascendente (de menor a mayo)

14, 15,15, 15, 15, 16, 16, 16, 17, 17, 18

Calculemos en primer lugar la posición de la medina, la que hemos dicho que corresponde el segundo cuartil. Como tenemos un total de 11 datos, fácilmente establecemos que la mediana es el valor que se encuentra en la posición número seis contando de izquierda a derecha o de derecha a izquierda y corresponde al número 6. Por definición este también es el del segundo cuartil, o sea $\boldsymbol{Q_2 = 6}$

14, 15,15, 15, 15, **16**, 16, 16, 17, 17, 18

Encontramos el valor del primero y tercer cuartil, calculando la posición de las medianas de los grupos de datos que se encuentran a la izquierda y a la derecha del segundo cuartil. Como apreciamos en cada uno de los lados hay 5 valores, por lo tanto, la mediana a la izquierda es el valor 15, es decir, $\boldsymbol{Q_1 = 15;}$ la mediana del grupo de la derecha corresponde al valor 17, por tanto $\boldsymbol{Q_3 = 17}$

Q_1 Q_2 Q_3

14, 15, 15, 15, 15, 16, 16, 16, 17, 17, 18

Para calcular la posición de cada uno de los valores que corresponden a los cuartiles, también se puede realizar aplicando fórmulas.

$\boldsymbol{Q_k = \frac{k(n+1)}{4}}$; en donde $\boldsymbol{k}$: ***número de cuartil*** y $\boldsymbol{n}$: ***cantidad total de datos***

$Q_1 = \frac{1(11+1)}{4} = \frac{12}{4} = 3$

Posición de Q_1: 3;

Valor de $Q_1 = 15$

$Q_2 = \frac{2(11+1)}{4} = \frac{24}{4} = 6$

Posición de Q_2: 6;

Valor de $Q_2 = 16$

$Q_3 = \frac{3(11+1)}{4} = \frac{36}{4} = 9$

Posición de Q_3: 9;

Valor de $Q_3 = 17$

Calculando para el ejercicio anterior

Los cálculos anteriores se realizaron con una cantidad impar de datos, veamos el comportamiento con una cantidad par de los mismos.

Ejercicio: Erasmo es pícher en el equipo de la comunidad, hasta la fecha ha participado en 12 partidos propinando la siguiente cantidad de ponches por partido.

5, 4, 6, 3, 4, 8, 5, 7, 6, 9, 4, 7

Organizados los datos se muestran de la siguiente manera

3, 4, 4, 4, 5, 5, 6, 6, 7, 7, 8, 9

Cuando el número de datos es par, para calcular el valor de cada cuartil apliquemos la fórmula de la mediana en cada uno de los intervalos.

Siendo $\boldsymbol{n}$: ***cantidad total de datos***; calculamos la posición de la mediana de los 12 datos conocidos.

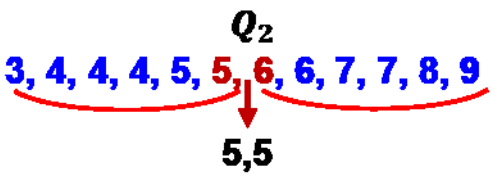
$\boldsymbol{M_e = \frac{12+1}{2} = \frac{13}{2} = 6,5}$

El resultado nos indica que debemos tomar los datos de las posiciones 6 y 7 es decir los valores $\boldsymbol{5\ y\ 6}$, luego calcular la media entre ellos

$M_e = \frac{5+6}{2} = \frac{11}{2} = 5,5$; por tanto, el valor de la mediana es $M_e = 5,5$

Como la mediana también corresponde al segundo cuartil, entonces $Q_2 = 5,5$

Gráficamente



Tanto a izquierda como a derecha del segundo cuartil, observamos que tenemos 6 datos, entonces para determinar el valor del primero y segundo cuartil, calculamos la mediana a cada lado

$M_e = \frac{6+1}{2} = \frac{7}{2} = 3,5$**;** encontrando que la posición de la mediana a izquierda y a derecha del segundo cuartil está entre los datos 3 y 4.

A la izquierda contando a partir del número 3, los valores de la posición 3 y 4, ambos corresponden a cuatro. Para encontrar el valor de la mediana debemos hacer el promedio de ambos valores

$M_e = \frac{4+4}{2} = \frac{8}{2} = 4$; por tanto, el valor de la mediana es $M_e = 4$

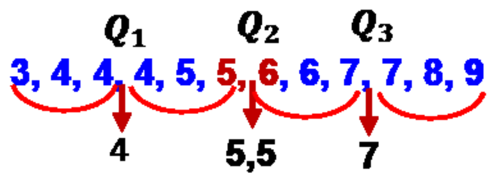
A la derecha contando a partir del número 6, los valores de la posición 3 y 4, ambos corresponden a siete. Encontramos el valor de la mediana

$M_e = \frac{7+7}{2} = \frac{14}{2} = 7$; por tanto, el valor de la mediana es $M_e = 7$

El valor de la mediana del grupo de datos de la izquierda corresponderá al primer cuartil y del grupo de la derecha al tercer cuartil, de aquí que:

$Q_1 = 4$**;** $Q_2 = 5,5$ **y** $Q_3 = 7$

Gráficamente



Con la práctica el proceso para encontrar la posición de los cuartiles y calcular su valor se puede realizar con mucha facilidad y rapidez después haber ordenado los datos. Solo es necesario contar el número de datos y recordar que el valor de la mediana corresponde al dato del medio.

Guía de autoestudio

La asistencia de los estudiantes varones de un aula de clases 16 encuentros es la siguiente: 20, 16, 16, 19, 17, 14, 14, 18, 20, 17, 10, 11, 12, 13, 19, 20. Encuentre Q_1, Q_2 **y** Q_3

La distancia en kilómetros que recorren quince estudiantes para asistir a los encuentros presenciales son las siguientes: 9, 8, 2, 8, 1, 9, 5, 2, 6, 3, 3, 4, 4, 4, 5. Encuentre Q_1, Q_2 y Q_3.

Encuentro 15 y 16:

Medidas de dispersión de datos no agrupados

- Varianza
- Desviación típica o estándar,
- Coeficiente de variación

Estimados estudiantes, este contenido lo estudiaremos en dos encuentros, las medidas de posición y dispersión para datos no agrupados, en la solución de situaciones en diferentes contextos.

A continuación, se te presenta información relacionada al contenido en estudio para que la lea y analice cada uno de los ejemplos desarrollados

a) Medidas de dispersión

Las **medidas de dispersión** nos permiten conocer cuánto se alejan o se agrupan los datos respecto a un valor central, como la media.

De manera que las medidas de dispersión nos dicen si los valores están muy concentrados cerca de la media o si, por el contrario, están muy dispersos. Cuanto mayor es la dispersión, más diferentes son los valores entre sí.

b) Varianza

La varianza es una medida de dispersión

Supongamos que cotizamos los precios de un litro de aceite en diferentes puntos del mercado, si todos los vendedores tienen precios similares, entonces la dispersión de los mismos con respecto a su promedio es pequeña, pero los precios son altos en un lugar y bajos en otros la dispersión de precios es grande, el valor de la varianza es alto.

Matemáticamente, se calcula como la media de los cuadrados de las desviaciones respecto a la media del conjunto. Cuando los datos proceden de una muestra, para calcularla se utiliza la fórmula.

$$S^2 = \frac{(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+(x_3-\bar{x})^2+\cdots+(x_n-\bar{x})^2}{n-1}$$

Cuando los datos proceden de una muestra, para calcularla se utiliza la fórmula.

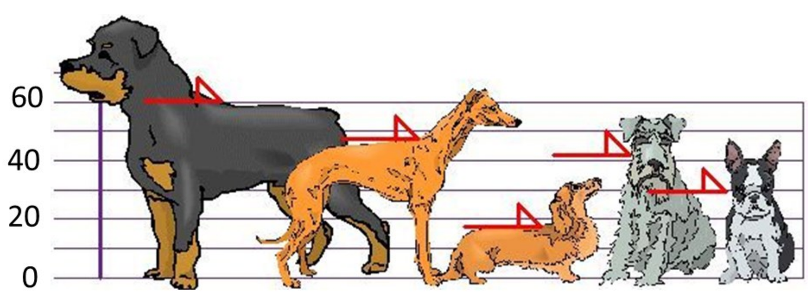
$$S^2 = \frac{(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+(x_3-\bar{x})^2+\cdots+(x_n-\bar{x})^2}{n}$$

Donde. S^2: Varianza; x_n: valor de los datos; $\bar{x}$: Media aritmética; n: número de datos

las unidades en las que se expresa la varianza están elevadas al cuadrado. Por ejemplo, si estamos midiendo en córdobas, la varianza se expresa en córdobas al cuadrado.

Al realizar el cálculo, las diferencias entre cada dato y la media se elevan al cuadrado para que los resultados sean siempre positivos, como se quiere calcular el promedio de las diferencias se necesita conocer el valor absoluto de cada diferencia y poder sumarlos.

Ejercicio:



1. Un grupo de amigos miden la altura de sus perros hasta los hombros (en centímetros), encontrando los siguientes valores:

$60\ cm$, $47\ cm$, $17\ cm$, $43\ cm$ y $30\ cm$.

Calcule la varianza.

Solución:

Calcular el valor de la media aritmética

$\bar{x} = \frac{60+47+17+43+30}{5} = \frac{197}{5} = 39{,}4$; la estatura media de los perros es $39{,}4\ cm$

Cálculo de la varianza

En este caso, vamos a considerar que se está midiendo la estatura de la población (perros de ciertos amigos) y no la de una muestra puesto que el ejercicio no menciona que se pretende inferir a otros perros.

Fórmula: $S^2 = \frac{(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+(x_3-\bar{x})^2+\cdots+(x_n-\bar{x})^2}{n}$

Sustituyendo: $S^2 = \frac{(60-39{,}4)^2+(47-39{,}4)^2+(17-39{,}4)^2+(43-39{,}4)^2+(30-39{,}4)^2}{5}$

$$S^2 = \frac{(20{,}6)^2+(7{,}6)^2+(-22{,}4)^2+(3{,}6)^2+(-9{,}4)^2}{5} = \frac{1085{,}2}{5}$$

$S^2 = 217{,}04$; la varianza corresponde a $\mathbf{217{,}4\ cm^2}$

Ejercicio.

2. Siete productos agrícolas tuvieron mejor rendimiento durante la presente cosecha con respecto a la cosecha del año anterior, superando a estos en los siguientes porcentajes: $6{,}5\%$, $4{,}4\%$, $3{,}8\%$, $6{,}9\%$, $8{,}0\%$, $5{,}8\%$, $5{,}1\%$. Calcule la varianza **muestral:**

Solución: calculando la media aritmética.

$\bar{x} = \frac{6{,}5+4{,}4+3{,}8+6{,}9+8+5{,}8+5{,}1}{7} = \frac{40{,}5}{7} = 5{,}786$; Media aritmética: $\bar{\boldsymbol{x}} \cong \mathbf{5{,}786}$

Cálculo de la varianza

$S^2 = \frac{(6{,}5-5{,}876)^2+(64{,}4-5{,}876)^2+(3{,}8-5{,}876)^2+(6{,}9-5{,}876)^2+(8-5{,}876)^2+(5{,}8-5{,}876)^2+(5{,}5-5{,}876)^2}{7-1}$

$S^2 = \frac{12{,}988}{6} = 2{,}165$; la varianza es igual a: $\boldsymbol{S^2} = \mathbf{2{,}165}\ \%^{\mathbf{2}}$

c) Desviación típica

El manejo de los resultados elevados al cuadrado, muchas veces resulta un poco tedioso, por lo cual se trabaja con la desviación típica o desviación estándar, que es igual a:

$\boldsymbol{S} = \sqrt{\boldsymbol{s^2}}$: donde $\boldsymbol{S}$: desviación típica; S^2: varianza

En el ejercicio "1" la varianza es de $\mathbf{217,4}\ \boldsymbol{cm^2}$

Calculando la desviación típica, obtenemos

$\boldsymbol{S} = \sqrt{217{,}4\ \boldsymbol{cm^2}} \cong 14{,}74$; la desviación estándar es de aproximadamente $14{,}74\ cm$

Podemos decir que a partir de la media aritmética $\boldsymbol{\bar{x}} = \mathbf{39,4}\ \boldsymbol{cm}$, sus estaturas varían aproximadamente $14{,}74\ cm$ hacia arriba y también hacia abajo.

d) Coeficiente de variación

El coeficiente de variación es una medida de dispersión, nos ayuda a ver si los datos están muy separados entre sí o bastante agrupados con respecto a la media. Este coeficiente es útil para comparar la variabilidad entre diferentes series de datos, incluso si sus unidades de medida no son las mismas. Un coeficiente de variación bajo indica que los datos están más uniformemente distribuidos alrededor del promedio, mientras que un valor alto señala una mayor dispersión

El coeficiente de variación se calcula dividiendo la desviación típica $(\boldsymbol{S})$ entre el valor absoluto de la media $(\boldsymbol{\bar{x}})$. Es una medida de tipo "relativa", es decir expresa la proporción de la desviación típica con respecto a la media y por lo general se en términos de porcentajes.

Formula:

$\boldsymbol{CV} = \frac{\boldsymbol{s}}{\boldsymbol{\bar{x}}}$; donde $\boldsymbol{CV}$: coeficiente de variación

Ejercicio. Los estudiantes de décimo grado del centro educativo registran la siguiente asistencia a los primeros 8 encuentros: 24, 23, 17, 19, 21, 18, 16 y 22

Calcular el coeficiente de variación de dicha población

Solución: Para calcular el coeficiente de variación primero debemos conocer la media aritmética de los datos y la desviación típica de los mismos.

Como ya sabemos calcular estos parámetros solamente resumiremos dichos cálculos en una tabla. Calculamos previamente la media y determinamos que es igual a **20**.

x	$\bar{x}$	$(x-\bar{x})$	$(x_1-\bar{x})^2$
24	20	4	16
23	20	3	9
17	20	-3	9
19	20	-1	1
21	20	1	1
18	20	-2	4
16	20	-4	16
22	20	2	4
Total			60

$$\boxed{\boldsymbol{s^2=\frac{60}{8}=7,5}}$$

$$\boxed{\boldsymbol{S=\sqrt{7,5}\cong 2,74}}$$

$$\boxed{\boldsymbol{CV=\frac{2,74}{20}\cong 0,137}}$$

$$\boxed{\boldsymbol{CV\cong 13,7\%}}$$

Respuesta:

Podemos concluir que la asistencia a clase varía en una relación de **0,137** con respecto a la asistencia promedio. Multiplicando por 100 la respuesta anterior, también podemos decir que la asistencia de los estudiantes a clases con respecto al promedio, varía en un $\mathbf{13,7}\%$

Guía de autoestudio

1- Halla la desviación típica de las temperaturas medias en grados centígrados registradas durante un periodo de seis días del pasado invierno: 27, 26, 32, 28, 33, 34

2- Los estudiantes de séptimo grado del centro educativo registran la siguiente asistencia a los primeros 8 encuentros: 45, 50, 48, 52, 51, 48, 47, 51. Encontrar coeficiente de variación de la asistencia a clases de estos estudiantes, compararlo con el de los estudiantes de décimo grado y responder ¿cuál de los dos grados varía menos en su asistencia a clases?

Bibliografía

1. Ministerio de Educación [MINED]. (s. f.). *Módulo auto formativo de Matemática 10mo grado*. [Material educativo no publicado].
2. **Para el archivo PDF:**
   Ministerio de Educación [MINED]. (s. f.). *Lmatematicas10mo.pdf* [Archivo PDF]. [Material educativo no publicado].

MINED
Un Ministerio en la Comunidad
¡UNIDA, NICARAGUA TRIUNFA!