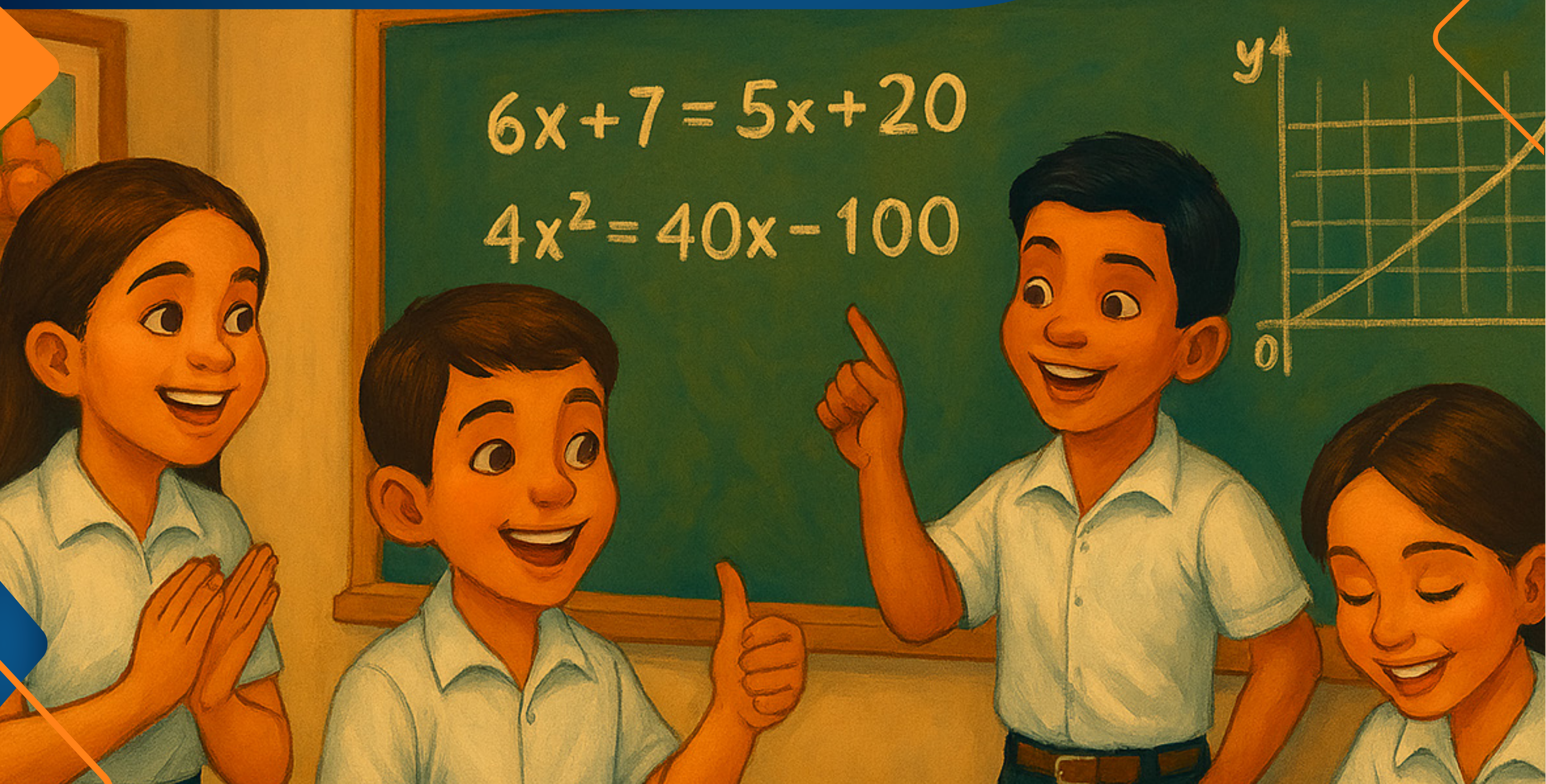
Dirección de Secundaria a Distancia en el Campo

MINED
Un Ministerio en la Comunidad

11mo Grado

GUÍA DE APRENDIZAJE



MATEMÁTICAS

CRÉDITOS

Dirección y coordinación general.

Tessia Olga Torres Thomas
Directora General de Eduación Secundaria (a.i)

Dirección y coordinación específica.

Mariana del Socorro Saborio Rodríguez
Directora de Programación Educativa

Elaborado por:

Alicia Verónica Ortiz Toruño
Asesora pedagógico Secundaria a Distancia en el Campo

Álvaro Alfonso Vega Estrada
Asesor pedagógico Secundaria a Distancia en el Campo

Huáscar Amaru Velásquez Valdez
Profesor De Educación Media - Secundaria Rural

José Bismarck Zeledón Centeno
Director de Núcleo Educativo Rural

Magda Catalina Maldonado Castillo
Directora de centro educativo

Marlon Bismarck Montoya
Profesor De Educación Media - Secundaria Rural

José Daniel Espinoza García
Facilitador de Formación Continua (IDEAS – CCD)

Luis Arcenio Zeledón Martínez
Profesor De Educación Media - Secundaria Rural

Revisión técnica:
Ministerio de Educación

Apoyo en Proceso de Validación:
Francisca del Socorro Cárcamo Olivas
Técnica de Programación Educativa

Diseño y Diagramación:

Indira Kasandra Salazar Cruz - Diseñadora gráfica (IDEAS – CCD)

Este documento pertenece al Ministerio de Educación y UNICEF Nicaragua. Cualquier reproducción puede ser hecha únicamente con el consentimiento de las partes.

Presentación

Estimado estudiante

El Gobierno de Reconciliación y Unidad Nacional, a través del Ministerio de Educación (MINED), entrega a estudiantes de Educación Secundaria a Distancia en el Campo, Guía de Aprendizaje de Matemática en Undécimo grado, el que contiene actividades de aprendizaje e información científica relacionada a los contenidos a abordar en el segundo semestre.

La guía de aprendizaje que ponemos en tus manos, facilitará el desarrollo del encuentro y tu estudio independiente. Podrás transcribir las actividades a tu cuaderno y de esta manera la guía será utilizada por otros estudiantes en el siguiente año escolar, por lo cual te invito a cuidarla, no rayarla y regresarla al centro de estudio.

Estamos seguros que será un material de mucho provecho para usted y con el acompañamiento de la maestra o maestro, harán efectivo el desarrollo de las actividades durante la clase y la continuidad de las mismas en su hogar con el acompañamiento de su familia.

"Seguimos adelante, procurando hacer lo mejor todos los días, para que unidos sigamos construyendo el porvenir". (Murillo. R, 2024)

Índice

Encuentro 1:

La Recta

- Ecuación Punto-Pendiente de la Recta
- Ecuación de la recta que pasa por dos puntos.
- Ecuación General de la Recta

Descripción

Estimado estudiante, en este encuentro estudiaremos las formas de expresar la ecuación de la recta, las condiciones de paralelismo y perpendicularidad de rectas, así como el cálculo de la distancia del origen a una recta del plano, en la solución de situaciones en diferentes contextos.

A continuación, te presentamos la siguiente información referida al contenido en estudio para que la leas y analices cada uno de los ejemplos desarrollados.

La recta

La parte de la matemática que conecta el álgebra con la geometría se llama **Geometría Analítica**.

El estudio de **la línea recta** es de importancia porque en muchas situaciones de nuestro entorno se da una relación directamente proporcional entre magnitudes. Esta relación se describe gráficamente mediante una línea recta. Por ejemplo, la estimación de los costos fijos y los costos variables que hace una pequeña empresa se modelan mediante líneas rectas; por otra parte, si observamos a nuestro alrededor, ¿cuántas formas hay que nos den la idea de línea recta?

Consideremos la siguiente situación:

El costo de alimentación de un gallinero se determina por el consumo de alimento más un costo fijo diario por mantenimiento del gallinero de C$120. Si el costo de consumo de 1 kilogramo de alimento es de C$50.

a) ¿Cuál es la expresión algebraica que permite calcular la relación entre el consumo de alimento y el costo diario total del gallinero?
b) Si en un día se realizó un pago de C$ 1 020. ¿Cuánto kilogramos de alimento se ha comprado?

Solución

Analicemos la situación

Variables y criterio:

- La cantidad de alimento consumido en kilogramos del gallinero**:** "$\boldsymbol{x}$"
- Costo diario total del gallinero del: "$\boldsymbol{y}$"

Constantes:

- 50 es el costo de alimento consumido en kilogramos
- 120 es el costo fijo por cuido y mantenimiento
- Luego se puede establecer la siguiente relación entre las variables

El costo de alimentación de un grupo de gallinas ponedoras (y), se determina por el costo de consumo de alimento $(50x)$ más un costo fijo diario por mantenimiento del gallinero de C$120.

$$y = 50x + 120$$

Respuesta: La expresión algebraica que permite calcular la relación entre el consumo de alimento y el costo diario total del gallinero es: $y = 50x + 120$

La expresión $y = 50x + 120$, es una ecuación lineal con dos variables, llamada también función afín de la forma de $\boldsymbol{y = mx + b}$, es en si una ecuación dos variables, que al **graficarla se obtiene una recta.**

Ahora para dar respuesta al inciso b), si en un día determinado se realizó un pago C$ 1 020 ¿Cuántos kilogramos de alimento se ha comparado?

Pero el valor de $y = 1\,020$, entonces sustituyendo en:

$y = 50x + 120$	
$1\,020 = 50x + 120$	Sustitución del valor de $y = 1\,020$
$1\,020 - 120 = 50x$	Traspone el 120
$900 = 50x$	Simplificación de constantes
$\frac{900}{50} = x$	Traspone el coeficiente 50
$18 = x$	Resultado de la división

Respuesta: Por tanto, se tiene que se han comprado 18 kilogramos de alimento.

El valor de $\boldsymbol{x = 18} \;\wedge\; \boldsymbol{y = 1\,020}$, forma un par ordenado $(\mathbf{18};\ \mathbf{1\,020})$, que es solución de la expresión: $\boldsymbol{y = 50x + 120}$, debido a que satisface la ecuación, si se verifica:

$$\boldsymbol{x = 18} \;\wedge\; \boldsymbol{y = 1\,020}$$

$$\mathbf{1\,020} = 50(\mathbf{18}) + 120$$
$$1\,020 = 900 + 120$$
$$1\,020 = 1\,020$$

La expresión $\boldsymbol{y = m\,x + b}$, es una ecuación de primer grado con dos variables. Gráficamente, representa una línea recta. Entonces, se puede concluir que toda ecuación de primer grado con dos variables representa gráficamente una línea recta y que toda línea recta se puede describir mediante una ecuación de primer grado en dos variables.

Pendiente de la recta

Una **línea recta** es un conjunto de puntos tales que, al tomar dos de ellos cualesquiera y diferentes **A** $(\boldsymbol{x_1, y_1})$ y $\boldsymbol{B(x_2, y_2)}$ el valor del cociente $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ es siempre constante. Al cociente se le llama Pendiente de la recta y se denota por "m", es decir: $m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}, x_1 \neq x_2$.

Observa que:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-(y_1 - y_2)}{-(x_1 - x_2)} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

Ejemplo. Dados los puntos $A(-2,-3)\ y\ C(1,3)$, encuentre la pendiente de la recta que pasa por los dos puntos.

Solución

Con $A(-2,-3)\ \wedge\ C(1,3)$, la pendiente es: $m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$, sustituyendo los valores correspondientes.

$A(-2,-3) \qquad \wedge \qquad C(1,3),$

$x_1 = -2 \quad y_1 = -3 \qquad\qquad x_2 = 1 \quad y_2 = 3$

$$m = \frac{3-(-3)}{1-(-2)} = \frac{3+3}{1+2} = \frac{6}{3} = 2$$

Ubica los dos puntos en el Plano Cartesiano como se muestra en la figura, luego utilizando una regla une los puntos al trazar una recta sobre ellos, la recta se muestra en la Figura 1.

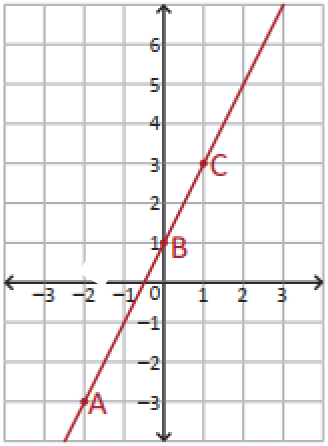


Figura 1

Ecuación Punto-Pendiente de la Recta

La ecuación de la recta que tiene **pendiente** “$\boldsymbol{m}$” y pasa por el punto conocido **A** $(\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{y_1})$ es:

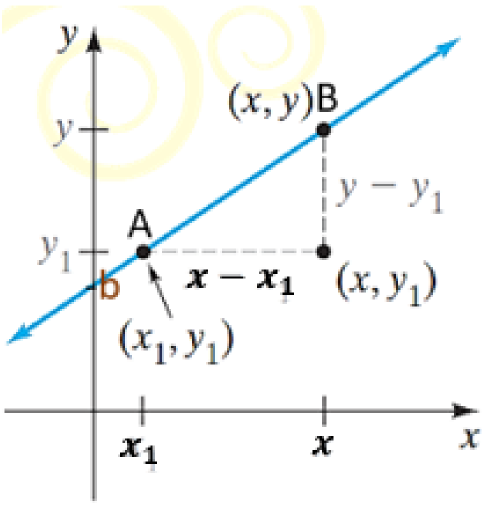
$$\boldsymbol{y - y_1 = m(x - x_1)}$$

Se llama **ecuación punto- pendiente** de la recta.

Para graficar la recta conociendo el punto **A** $(\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{y_1})$ sobre ella se debe realizar lo siguiente:

1.Sustituir un valor particular para “x” y encontrar el valor correspondiente para “y”.

2.Ubicar sobre el Plano Cartesiano los puntos **A** $(\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{y_1})$ y el punto obtenido en el inciso1.



Ejemplo. Encuentra la ecuación de la recta cuya pendiente es $m = \frac{1}{2}$ y pasa por el punto $A(-3,2)$.

Se tiene entonces que $m = \frac{1}{2}$ y del punto $A(-3,2)$, $x_1 = -3 \wedge y_1 = 2$, luego se sustituye los valores en la forma **Punto-Pendiente**:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$
$$y - 2 = \frac{1}{2}(x - (-3))$$
$$y = \frac{1}{2}(x + 3) + 2$$

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}(3) + 2$$
$$y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} + 2$$
$$y = \frac{1}{2}x + \frac{3+4}{2}$$
$$y = \frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$$

Para graficar la recta se sustituye un valor particular para "x" en la ecuación $y = \frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$, luego se encuentra el valor para "y".

Por ejemplo:

Si $x = 1$, entonces el valor de "y" es:

$$y = \frac{1}{2}(1) + \frac{7}{2}$$
$$y = \frac{1}{2} + \frac{7}{2}$$
$$y = \frac{1+7}{2}$$
$$y = \frac{8}{2}$$
$$y = 4$$

Se colocan los puntos $\boldsymbol{A(-3,2)}$ y $\boldsymbol{(1,4)}$ en el Plano Cartesiano y se traza la recta que pasa por ambos puntos, con la regla, como se muestra en la Figura 2.

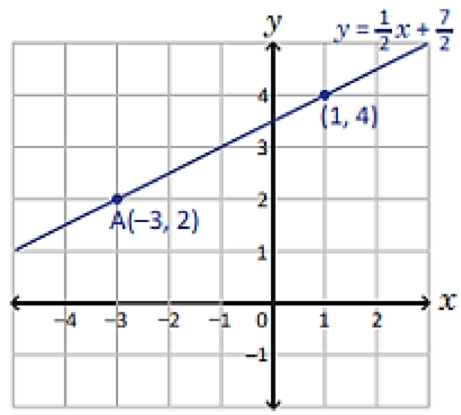


Figura 2

Ecuación de la Recta que pasa por dos Puntos

La ecuación de la recta que pasa por dos puntos conocidos A $(\boldsymbol{x_1, y_1})$ y $\boldsymbol{B(x_2, y_2)}$, con $x_1 \neq x_2$ es: $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$

-Para graficar la recta conocidos los dos puntos A y B en el Plano Cartesiano.

1. Se ubican los puntos en el Plano Cartesiano.

2. Con la regla se traza la línea que une los dos puntos.

Ejemplo. Encuentra la ecuación de la recta que pasa por los puntos $A(-2,4)$ y $B(4,1)$, y grafique.

Solución

Con: $A(-2,4)$ $\wedge$ $B(4,1)$

$x_1 = -2 \quad \wedge \quad y_1 = 4 \qquad x_2 = 4 \quad \wedge \quad y_2 = 1$

Luego, sustituyendo los valores en la ecuación:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

$$y - 4 = \frac{1-4}{4-(-2)}(x-(-2))$$

$$y - 4 = \frac{-3}{4+2}(x+2)$$

$$y - 4 = \frac{-3}{6}(x+2)$$

$$y = \frac{-1}{2}(x+2) + 4$$

$$y = \frac{-1}{2}x + \frac{-1}{2}(2) + 4$$

$$y = \frac{-1}{2}x + \frac{-2}{2} + 4$$

$$y = \frac{-1}{2}x - 1 + 4$$

$$y = \frac{-1}{2}x + 3$$

La grafica de $y = \frac{-1}{2}x + 3$ se muestra en la Figura 3.

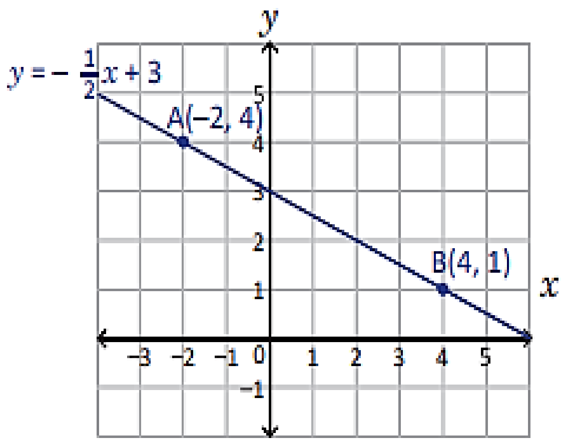


Figura 3

Ecuación General de la Recta

La ecuación de la forma $\boldsymbol{Ax + By + C = 0}$ donde A, B, C son números reales (A, y B, no pueden ser ceros al mismo tiempo) tiene por grafica una línea recta.

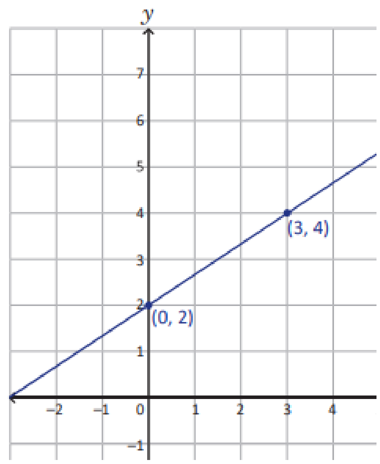
A esta forma $Ax + By + C = 0$, **se le llama forma general de la ecuación de una recta**.

Ejemplo. Exprese la ecuación de la recta $y = \frac{2}{3}x + 2$, en forma de $Ax + By + C = 0$, luego grafique la ecuación.

Solución:

Se efectúa las operaciones indicadas

$$y = \frac{2}{3}x + 2$$
$$y = \frac{2x + 6}{3}$$
$$3y = 2x + 6$$
$$0 = 2x + 6 - 3y$$
$$2x - 3y + 6 = 0$$



$y = \frac{2}{3}x + 2$

Para encontrar los puntos $(0,2)$ y $(3,4)$, se tomaron los valores de $x = 0$ y $x = 3$ sustituyendo para encontrar los valores de $y = 2$ y $y = 3$.

Ejemplos. Posiciones Relativas de la Recta en el Plano Cartesiano el cual se pueden ser varios casos.

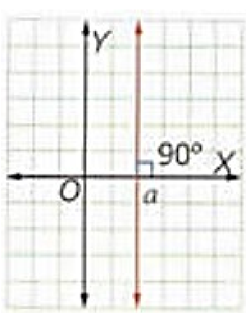


Figura 4

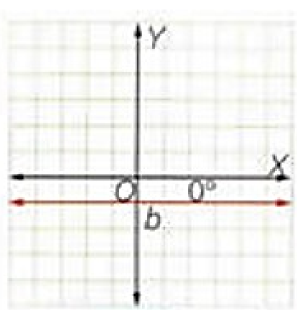


Figura 5

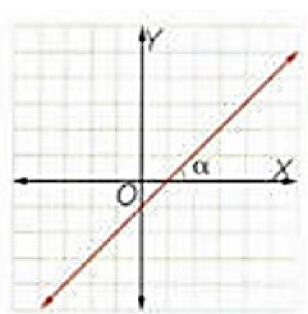


Figura 6

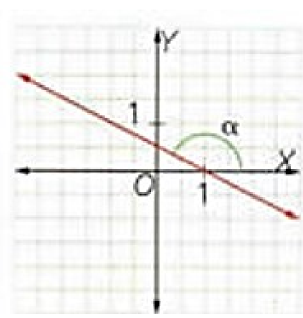


Figura 7

Practica lo aprendido

Resuelve los siguientes ejercicios en su cuaderno de forma individual o en equipo:

1. Encuentre la ecuación de la recta que tiene la pendiente dada y pasa por el punto A , luego trace la gráfica en el Plano Cartesiano.

a) Pendiente $m = -4,\ A(-3{,}5)$ b) Pendiente $m = 10,\ A(1,-1)$

2. Encuentre la ecuación de la recta que pasa por los puntos P_1 y P_2; graficarlas en un solo Plano Cartesiano.

a) $P_1(0{,}3)$ y $P_2\left(\frac{-3}{2},0\right)$ b) $P_1\left(\frac{1}{2},0\right)$ y $P_2\left(\frac{5}{2},\frac{-3}{2}\right)$

3. Si $A(0{,}3)$ y $B(-8{,}0)$, encuentra:
   a) La pendiente de la recta
   b) La ecuación de la recta
   c) Trace la gráfica de la ecuación lineal.
   d) Analiza los puntos $A(0{,}3)$ y $B(-8{,}0)$, que podemos concluir.
4. Resuelve la siguiente situación

   El costo de un atajo de dulce está constituido por un costo de fabricación de C$20 unidad y gastos diarios fijos.
   a) Suponiendo que el costo total para producir 200 unidades de atajo de dulce es de C$ 4 500, determina los gastos generales diarios.
   b) Si se producen "x" unidades diariamente con un costo diario total "y", escribe la ecuación en términos de "x" y "y".
   c) Halle el costo total para producir 500 unidades de atajo de dulce en 3 días.

Guía de autoestudio

A continuación, se proponen las siguientes actividades para que realice su autoestudio.

I. Encuentre la ecuación de la recta que tiene la pendiente dada y pasa por el punto A , luego trace la gráfica en el Plano Cartesiano.

a) Pendiente $m = \frac{1}{5}$, $A(0,4)$

b) Pendiente $m = -2$, $A(1,-4)$

c) Pendiente $m = \frac{2}{5}$, $A(0,\frac{-4}{5})$

d) Pendiente $m = -5$, $A(-2,-3)$

II. Encuentre la ecuación de la recta que pasa por los puntos P_1 y P_2; graficarlas en un solo Plano Cartesiano.

b) $P_1(-4,-4)$ y $P_2(2,5)$

d) $P_1(0,-1)$ y $P_2(\frac{-1}{2},0)$

e) $P_1(1,2)$ y $P_2(-2,-3)$

f) $P_1(4,-1)$ y $P_2(3,2)$

III. Dados los puntos $A(0,-3)$ y $B(6,4)$, ¿Cuál debe ser el valor de "x", en $C(x, 25)$ para que el punto A, B y C, estén en la misma recta. (Nota: Los puntos están en la misma recta y la recta tiene la misma pendiente, exceptuando sus puntos que son distintos).

IV. Escribe las siguientes ecuaciones de líneas rectas en su forma general. (Nota: Expresa el resultado con coeficientes enteros)

a) $y = 4x + 3$

b) $y = 4x - \frac{2}{3}$

c) $y = \frac{4}{3}x + \frac{1}{6}$

d) $y = -\frac{x}{5} - 1$

V. Resuelve las siguientes situaciones problemáticas de forma individual o en equipo.

Los alumnos de 11vo grado piensan en realizar una excusión a la Hacienda San Jacinto en un recorrido de primera clase. Desean alquilar un bus y disponen de dos operaciones: C$ 7 000 pesos por día o C$ 3 000 por día más 40 pesos por kilómetro recorrido.

a) Si piensan quedarse para explorar toda la zona por 8 días y estiman recorrer 400 km, ¿Qué opción es más conveniente?

b) ¿A partir de qué recorrido es más conveniente que viajen si deciden tomar 10 días de excursión?

Encuentro 2:

Condición de paralelismo de dos rectas

- Condición de perpendicularidad de rectas
- Distancia del origen a una recta en el Plano

Descripción

Estimado estudiante, en este encuentro estudiaremos las condiciones de paralelismo y perpendicularidad de rectas, así como el cálculo de la distancia del origen a una recta del plano, en la solución de situaciones en diferentes contextos.

A continuación, te presentamos la siguiente información referida al contenido en estudio para que la leas y analices cada uno de los ejemplos desarrollados.

Condición de Paralelismo de dos rectas

Primeramente, recordemos el concepto de rectas paralelas en el plano: **dos rectas son paralelas** si no tienen puntos en común. Esto indica que hay una separación constante entre dos rectas paralelas.

Dos rectas son paralelas si y solo si tienen la misma pendiente. Esto quiere decir que:

$$\boldsymbol{m_1 = m_2.}$$

Para una mejor comprensión analiza los siguientes ejemplos.

Ejemplo 1. Verifique que las rectas $y = 2x + 2$ y $y = 2x - 1$ son paralelas.

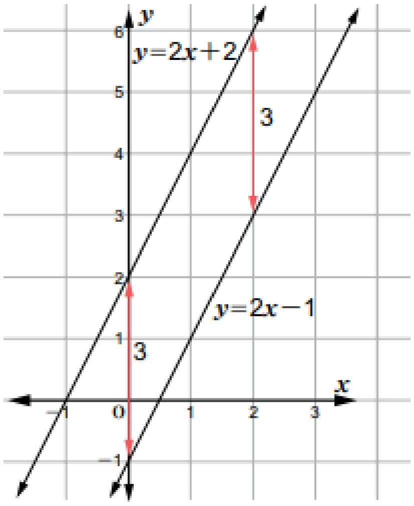
Solución

Para verificar que dos rectas son paralelas solo necesitamos comprobar que tienen la misma pendiente.

Observemos las rectas dadas: $y = 2x + 2$ y $y = 2x$

Recordemos la forma de la ecuación $\boldsymbol{y = mx + b}$**,** donde m es la pendiente de la recta.

Entonces tenemos que:



- Para $y = 2x + 2$, $m_1 = 2$
- Para $y = 2x$, $m_2 = 2$

Podemos concluir que las rectas $y = 2x + 2$ y $y = 2x$ son paralelas porque $m_1 = m_2$, lo que significa que tienen la misma pendiente.

Si graficamos ambas rectas como se muestra en la figura de la derecha se observa una separación vertical constante de 3 unidades entre las dos rectas, lo que indica que estas no tienen puntos en común, es decir, son rectas paralelas.

Nótese que la pendiente de ambas rectas es $m = 2$.

Ejemplo 2. Encuentra la ecuación de la recta que pasa por el punto $A(1{,}3)$ y es paralela a $2x + y - 1 = 0$.

Solución:

Despejando "y", para encontrar el valor de la pendiente en la ecuación $2x + y - 1 = 0$, se tiene: $y = -2x + 1$; luego $m = -2$.

Como la recta pasa por el punto $A(1{,}3)$, se debe utilizar la ecuación de la recta Punto-Pendiente: $\boldsymbol{y - y_1 = m(x - x_1)}$**,** luego sustituyendo los valores de

$A(1{,}3)$, $x_1 = 1 \quad \wedge \quad y_1 = 3$ con $m = -2$, así sustituyendo los valores encontrados en:

$$\boldsymbol{y - y_1 = m(x - x_1)}$$

$$\boldsymbol{y - 3 = -2(x - 1)}$$

$$\boldsymbol{y - 3 = -2x + 2}$$

Por tanto, la ecuación de la recta que pasa por $A(1{,}3)$ y es paralela a $y = -2x + 1$, es $\boldsymbol{y = -2x + 5}$**.**

$$\boldsymbol{y = -2x + 2 + 3}$$

$$\boldsymbol{y = -2x + 5}$$

Condición de perpendicularidad de rectas

Así como se cuenta con un criterio para determinar si dos rectas del plano son paralelas, a partir de sus pendientes, también se pueden utilizar para saber si son perpendiculares.

También es importante recordar que **dos rectas del plano son perpendiculares** si estas se interceptan en un punto, formando ángulos rectos (con medida de 90°).

Dos rectas son perpendiculares si y solo el producto de su pendiente es igual a -1. Es decir que: $\boldsymbol{m_1 . m_2 = -1}$

Para una mejor comprensión analiza los siguientes ejemplos.

Ejemplo 3. Considere la recta que pasa por (0, 0) y (-2, 1) y la recta $y = 2x$ y responda los siguientes incisos:

a) Determine la ecuación de la recta que pasa por $(0, 0)$ y $(-2, 1)$.

b) Verifique con un transportador que las rectas dadas son perpendiculares.

c) Establezca la relación existente entre las pendientes de dichas rectas.

Solución

a) La ecuación de la recta que pasa por $(0, 0)$ y $(-2, 1)$ es:

$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$ Ecuación de la recta que pasa por dos puntos

$y - 0 = \frac{1-0}{-2-0}(x - 0)$ Sustituimos los puntos en la ecuación

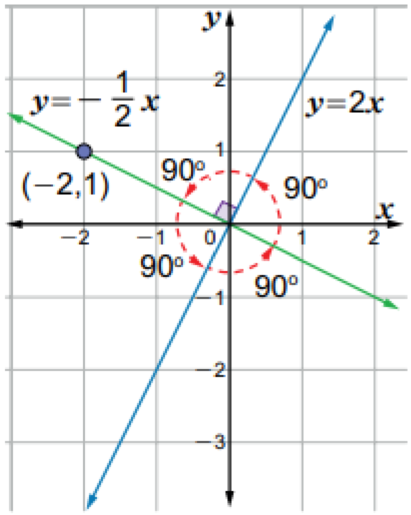
$$\boldsymbol{y = -\frac{1}{2}x}$$

b) La gráfica de la derecha muestra que los ángulos formados por las rectas $y = 2x$ y $y = -\frac{1}{2}x$ son de 90º, es decir, dichas rectas son perpendiculares.

c) Las pendientes de $y = 2x$ y $y = -\frac{1}{2}x$ son $m_1 = 2$ y $m_2 = -\frac{1}{2}$, respectivamente.

De esta última igualdad se tiene $m_2 = -\frac{1}{2} = -\frac{1}{m_1}$

Es decir: $m_1 . m_2 = -1$



Si graficamos ambas rectas como se muestra en la figura de la derecha, se observa que mediante el uso del transportador nos permitirá comprobar que las rectas son perpendiculares ya que se interceptan en el punto (0;0), formando ángulos rectos (con medida de 90º).

Ejemplo 4. Encuentra la ecuación de la recta que pasa por el punto $A(1{,}3)$ y es perpendicular a $2x + y - 1 = 0$.

Solución:

Despejando "y", para encontrar el valor de la pendiente en la ecuación $2x + y - 1 = 0$, se tiene: $y = -2x + 1$; luego $m_1 = -2$.

Ahora se utiliza la ecuación $\boldsymbol{m_1 . m_2 = -1}$ para encontrar la pendiente de la recta que va a ser perpendicular a: $y = -2x + 1$, entonces como $m_1 = -2$, se tiene:

$\boldsymbol{m_1 . m_2 = -1}$

$2m_2 = -1$

$$m_2 = \frac{-1}{2}$$

Se debe considerar entonces que: $A(1{,}3)$, $x_1 = 1 \ \wedge \ \ y_1 = 3$ con $m = \frac{-1}{2}$, Utilizando la ecuación de la recta Punto-Pendiente: $\boldsymbol{y - y_1 = m(x - x_1)}$, y sustituyendo los valores de se tiene:

$$\boldsymbol{y - y_1 = m(x - x_1)}$$

$$\boldsymbol{y - 3 = \tfrac{-1}{2}(x - 1)}$$

$$\boldsymbol{y - 3 = \frac{-1}{2}x + \frac{1}{2}}$$

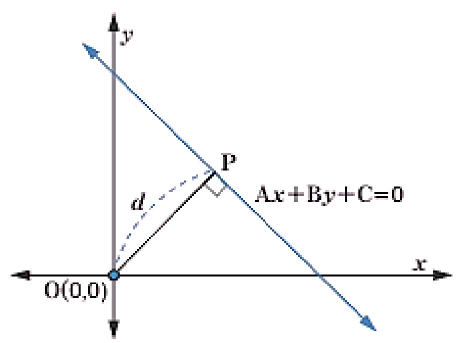
$$\boldsymbol{y = \frac{-1}{2}x + \frac{1}{2} + 3}$$

$$\boldsymbol{y = \frac{-1}{2}x + \frac{1+3}{2}}$$

$$\boldsymbol{y = \frac{-1}{2}x + \frac{5}{2}}$$

Por tanto, la ecuación de la recta que pasa por $A(1{,}3)$ y es perpendicular a $y = -2x + 1$, es $\boldsymbol{y = \tfrac{-1}{2}x + \tfrac{5}{2}}$.

Distancia del origen a una recta en el Plano



La distancia del punto $O(0{,}0)$ a la recta $Ax + By + c = 0$, es la longitud del segmento $\overline{OP}$, siendo P un punto de la recta de modo que $\overline{OP}$ es perpendicular a $Ax + By + c = 0$.

La distancia de $(0{,}0)$ a la recta $Ax + By + c = 0$ es:

$$\boxed{d = \frac{|C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}}$$

La figura ubicada a la derecha muestra la distancia del origen $O(0{,}0)$ a la recta: $Ax + By + c = 0$.

Ejemplo 5. Calcule la distancia del origen $(0,0)$ a cada recta dada:

$a)\ 3x + 4y + 15 = 0$ $\qquad$ $b)\ 2x - y - 2 = 0$

Solución:

En la recta $3x + 4y + 15 = 0$, $A = 3, B = 4, C = 15$, sustituimos los valores en la expresión de modo que:

$$d = \frac{|C|}{\sqrt{A^2 + B^3}} = \frac{|15|}{\sqrt{(3)^2 + (4)^2}} = \frac{|15|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{|15|}{\sqrt{25}} = \frac{15}{5} = 3$$

Así, la distancia de $O(0,0)$ a la recta $3x + 4y + 15 = 0$ **es 3**.

$b)$ En la recta $2x - y - 2 = 0$, $A = 2, B = -1, C = -2$, sustituimos los valores en la expresión de modo que:

$$d = \frac{|C|}{\sqrt{A^2 + B^3}} = \frac{|-2|}{\sqrt{(2)^2 + (-1)^2}} = \frac{|-2|}{\sqrt{4 + 1}} = \frac{|-2|}{\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

Se racionaliza el valor encontrado: $\frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} * \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{5}\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{5^2}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

Así, la distancia de $O(0,0)$ a la recta $2x - y - 2 = 0$ **es** $\mathbf{\frac{2\sqrt{5}}{5}}$

Practica lo aprendido

Resuelve los siguientes ejercicios en su cuaderno de forma individual o en equipo:

1. Determine la ecuación de la recta que pasa por $(-2, -3)$ y es paralela a la recta cuya ecuación es $4x + y - 5 = 0$
2. Determina si las parejas de rectas dadas son paralelas:

$$y = -3x + 1$$
$$y = 3x + 6$$

3. Determine si las siguientes parejas de rectas son perpendiculares:

$y = -2x$ y $y = \frac{x}{2}$

4. Encuentre la ecuación de la recta perpendicular a la recta que pasa por el punto indicado:

a) $x - 4y + 4 = 0; A(-1,5)$ b) $y = -2x + 5; P(-4,3)$

5. Calcule la distancia del origen $O(0,0)$ a cada recta dada:

a) $4x + 3y + 5 = 0$ b) $5x + 12y - 13 = 0$ c) $2x + y = 0$

Guía de autoestudio

A continuación, se proponen las siguientes actividades para que realice su autoestudio.

I. investigue si las parejas de rectas dadas son paralelas:

a) $y = 10 + 3x$ con $y = 3x - 1$

b) $2x - y = 0; A(4,0)$

II. Determine si las siguientes parejas de rectas son perpendiculares:

a) $x - y + 2 = 0$ y $3x + 2y + 6 = 0$ b) $y = \frac{4}{3}x$ y $y = -\frac{3}{4}x$

III. Para cada caso encuentre la ecuación de la recta perpendicular a la recta que pasa por el punto indicado:

$y = x;\ B(3,3)$ b) $6x + y - 1 = 0;\ P_1(2,-2)$

IV. Calcule la distancia del origen $O(0,0)$ a cada recta dada:

$6x + 8y - 5 = 0$ d) $x + 2y + 2 = 0$ f) $x + 3y - 7 = 0$

V. ¿Cuál es la ecuación de la recta que es perpendicular al eje "x" y que se encuentra a 5 unidades a la derecha del eje "y"?

Encuentro 3:

Circunferencia

- Ecuación de la circunferencia con centro en el origen
- Ecuación de la Circunferencia con centro $C(h,k)$ y radio r

Descripción

Estimado estudiante, en este encuentro estudiaremos las formas de expresar la ecuación de una circunferencia, ecuación de la circunferencia con centro en el origen y ecuación de la circunferencia con centro $C(h,k)$ y radio r.

A continuación, te presentamos la siguiente información referida al contenido en estudio para que la leas y analices cada uno de los ejemplos desarrollados.

Iniciaremos analizando la siguiente situación

Una avioneta de fumigación vuela en círculos, y alcanza a fumigar hasta 13m a la redonda, considerando como centro la casa de un campesino. El terreno tiene 30 metros de largo por 20 metros de ancho, y la casa del campesino se encuentra justo al centro del terreno. Determina si la plantación de frijoles ubicada a 11 metros al poniente de la casa y 5 metros al sur, llegan a ser fumigadas por la avioneta.

Solución

Analicemos la situación problemática con la siguiente figura:

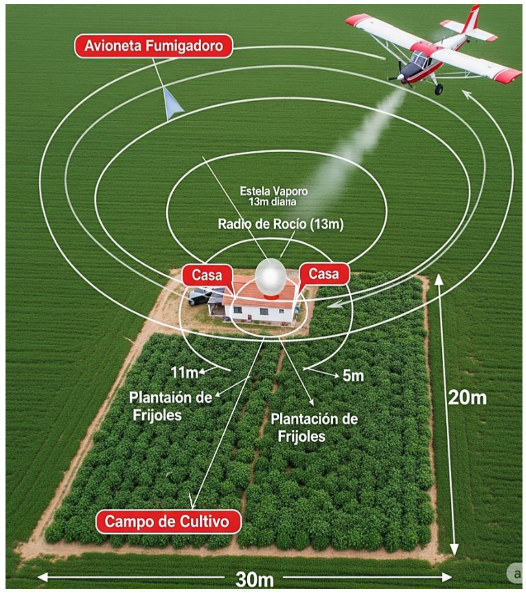


Figura 1: Casa del campesino y plantillo de frijoles

Sobre la imagen vamos a dibujar los ejes coordenados, considerando que la casa del campesino es el centro de los ejes coordenados. (Figura 2)

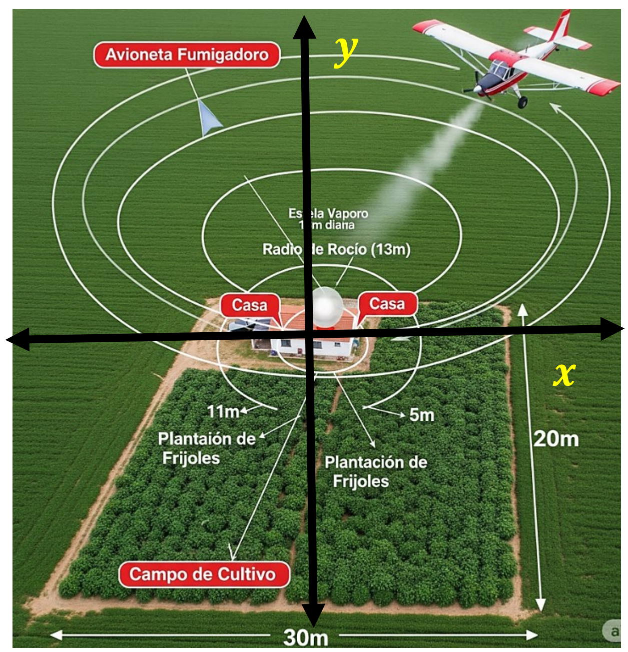
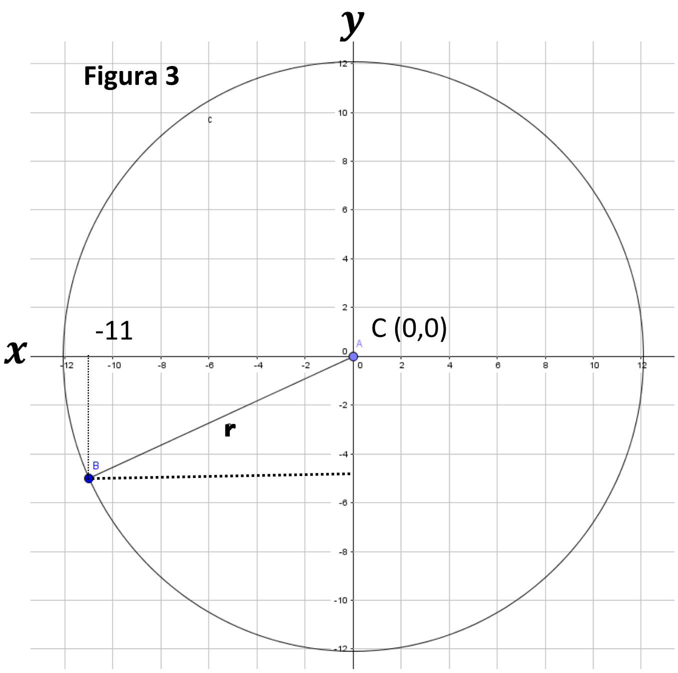


Figura 2: Casa del Campesino y Plantillo de Frijoles

Ubica el punto (0,0) centro de la casa y el punto (-1,-5) al poniente y sur de la casa mostrada en la figura 3, como logras observa estará en el III Cuadrante de Plano Cartesiano.



Si $x = -11$ y $y = -5$, podemos sustituir y obtener lo siguiente resultado:

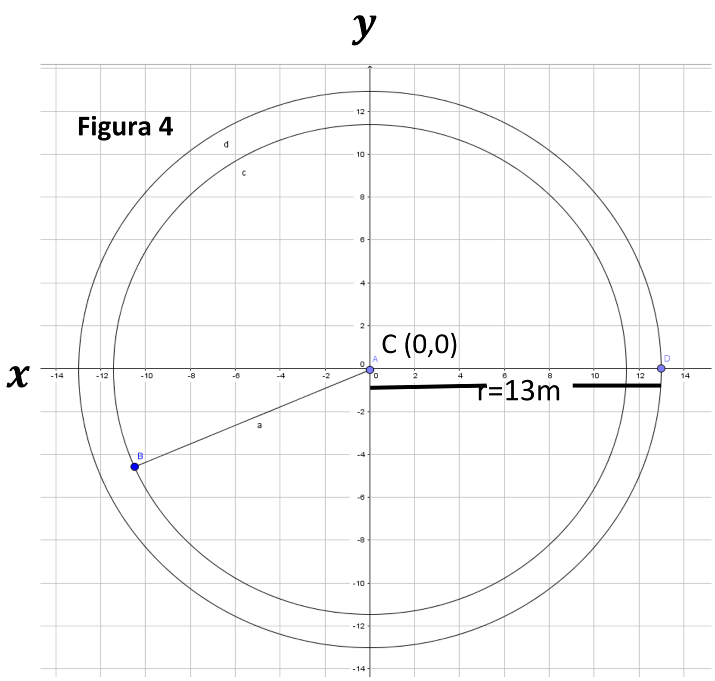
$(-11)^2 + (-5)^2 = 121 + 25 = 146,$

Pero el radio de cobertura de la avioneta es: $r = 13$, luego entonces se tiene que:

R:

$r^2 = (13)^2 = 169$, por lo que se concluye que: $146 < 169$, las plantas de frijoles son alcanzadas por la fumigación de la avioneta.

De la figura 3, se observa que $x = -11$ y $y = -5$, además el problema nos informa que el radio de cobertura de la avioneta es de 13 metros, por lo que agregamos ese dato a la figura 4.



Partiendo de esta situación podemos plantear la ecuación de la circunferencia con centro en el origen es: $x^2 + y^2 = r^2$, con esto ya podemos sustituir algunos valores a como se muestra a continuación.

Ecuación de la circunferencia con centro en el origen

El lugar geométrico de los puntos cuya distancia "r" a un punto fijo llamado **centro $\boldsymbol{O}(0,0)$**, se mantiene constante se conoce como **circunferencia**.

La ecuación que determina la gráfica de una circunferencia con centro en el origen del plano cartesiano y radio "r" está dada por:

$$\boldsymbol{x^2 + y^2 = r^2}$$

Esta última expresión es llamada **forma canónica**.

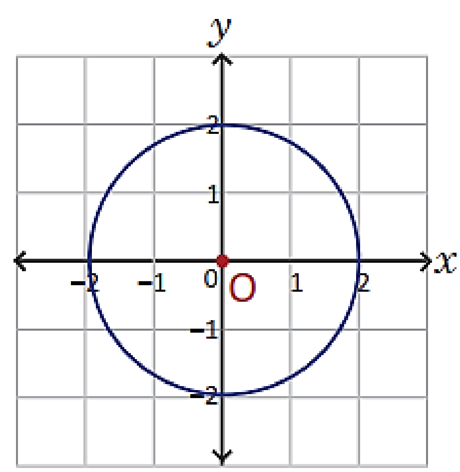
Ejemplo

Grafica en el plano cartesiano la figura (o lugar geométrico) determinada por la ecuación $x^2 + y^2 = 4$

Solución:

Como se observa la ecuación $x^2 + y^2 = 4$, tiene la forma $x^2 + y^2 = r^2$, de aquí que:

$$r^2 = 4$$
$$r^2 = 2^2$$
$$\sqrt{r^2} = \sqrt{2^2}$$
$$r = 2$$



Grafica de $x^2 + y^2 = 4$,

Ecuación de la circunferencia con centro $C(h,k)$ y radio r

La ecuación que determina la gráfica de una circunferencia con centro $\boldsymbol{C}(h,k)$ y radio "r" esta dada por:

$$\boldsymbol{(x-h)^2+(y-k)^2=r^2}$$

Esta expresión se denomina **forma ordinaria de la ecuación de la circunferencia**.

Ejemplo

Determina la ecuación de la circunferencia con centro $C(2,1)$ y $r=2$, luego grafica el lugar geométrico.

Solución:

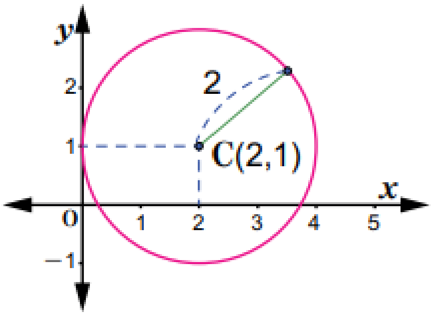
Se tiene el centro: $C(2,1)$, de aquí se sabe que: $h=2 \wedge k=1$, además $r=2$, sustituyendo estos valores en la ecuación: $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$, obtiene:

$(x-2)^2+(y-1)^2=(2)^2$

Es decir:

$(x-2)^2+(y+1)^2=4$

Gráfica de $(x-2)^2+(y+1)^2=4$



Practica lo aprendido

I. Resuelve los siguientes ejercicios en su cuaderno de forma individual o en equipo:

1. Deduce la ecuación de la circunferencia con centro en el origen con el radio dado:

   a) $r = 1$ b) $r = 6$ c) $r = \frac{1}{2}$

2. Grafica en el Plano Cartesiano los siguientes lugares geométricos.

   a) $x^2 + y^2 = 25$ c) $x^2 + y^2 = 100$ e) $x^2 + y^2 = \frac{3}{4}$

3. Determine la ecuación de la circunferencia con centro en el punto C y radio r.

   a) $C(4,1)$ y $r = 3$ c) $C(3,-4)$ y $r = \frac{2}{3}$ e) $C(3,1)$ y $r = 5$

4. Grafica en el Plano Cartesiano los siguientes lugares geométricos determinadas por las siguientes ecuaciones.

   a) $(x-3)^2 + (y-1)^2 = 9$ c) $x^2 + (y-4)^2 = \frac{25}{4}$ e) $(x-3)^2 + (y+1)^2 = 10$

5. El terremoto ocurrido en la ciudad de Managua en 1972, específicamente en el lago Xolotlán de esta ciudad; el terremoto afecto a todos los lugares a 28 km a la redonda. Si el volcán Momotombo se ubica a 7 km hacia el poniente a 17 kilómetros hacia el norte del epicentro, entonces ¿fue afectado por el terremoto?

6. En las fiestas Patronales de la Costa Caribe se coloca tradicionalmente “El Palo de Mayo” o “Palo Volador” con una cuerda de aproximadamente de 2m y atada a uno de sus pies, si se ubicara una caseta de control para prevenir algún accidente a un metro al oriente y 3 metros al sur del centro del “Palo de Mayo”. Predice si la ubicación de la caseta ayudará a prevenir accidentes o es parte de uno.

Guía de autoestudio

A continuación, se proponen las siguientes actividades para que realice su autoestudio.

Resuelve los siguientes ejercicios en su cuaderno

1. Deduce la ecuación de la circunferencia con centro en el origen con el radio dado:

   a) $r = \sqrt{10}$ b) $r = \frac{4}{3}$

2. Grafica en el Plano Cartesiano los siguientes lugares geométricos.

   a) $x^2 + y^2 = \frac{16}{25}$ b) $x^2 + y^2 = 8.4$ c) $x^2 + y^2 = 5$

3. Determine la ecuación de la circunferencia con centro en el punto C y radio r.

   a) $C(-2,5)$ y $r = 2$ b) $C(-2,-2)$ y $r = \sqrt{2}$ c) $C(-1,-3)$ y $r = \sqrt{8}$

4. Grafica en el Plano Cartesiano los siguientes lugares geométricos determinadas por las siguientes ecuaciones.

   a) $(x-4)^2 + (y+3)^2 = 25$ b) $(x+1)^2 + (y+1)^2 = 5$ c) $x^2 + (y-1)^2 = 25$

5. Emilio tiene una granja de conejos, el cual tardan 4 días en consumir la hierba de un terreno circular cuya circunferencia cumple $x^2 + y^2 = 100$ metros. ¿Qué cantidad en m^2

   en promedio por día, consumió el conejo?

6. Un barril de vino se cae de su sitio donde se encuentra ubicado y rueda. Si la ecuación que tiene la circunferencia de la base es $x^2 + y^2 - 1 = 0$ y el radio esta medido en metros. ¿Cuántos metros alcanzara a rodar si da 7 vueltas después de caer?

Encuentro 4:

Forma general de la ecuación de una circunferencia.

- Transformación de la forma general a la forma ordinaria de la ecuación de una circunferencia.
- Intersecciones de una circunferencia y una recta secante o tangente a esta.

Descripción

Estimado estudiante, en este encuentro estudiaremos la forma general de la ecuación de una circunferencia, la transformación de la forma general de la ecuación a la forma ordinaria y las intersecciones entre circunferencia y una recta secante o una tangente, en la solución de situaciones en diferentes contextos.

A continuación, te presentamos la siguiente información referida al contenido en estudio para que la leas y analices cada uno de los ejemplos desarrollados.

Forma general de la ecuación de una circunferencia

x

La ecuación $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ de una circunferencia puede escribirse como:

$$\boxed{\boldsymbol{x^2+y^2+Cx+Dy+E=0}}$$

Siendo $C, \mathrm{D}, \mathrm{E}$ constantes determinadas. A esta ecuación se le denomina **forma general de la ecuación de la circunferencia.**

Ejemplo Determine la forma general de la siguiente ecuación de la circunferencia: $(x-2)^2+(y-2)^2=3$

Cuadrado de la suma y de la diferencia de dos términos:

$(x+a)^2=x^2+2ax+a^2$

$(x-a)^2=x^2-2ax+a^2$

Solución:

$(x^2 - 4x + 4) + (y^2 - 4y + 4) = 3$ Desarrollamos los cuadrados de los binomios

$x^2 + -4x + 4 + y^2 - 4y + 4 = 3$ Eliminamos paréntesis

$x^2 + -4x + 4 + y^2 - 4y + 4 + 3 = 0$ Efectuamos la transposición de 3 al lado izquierdo

$x^2 + y^2 - 4x - 4y + 8 - 3 = 0$ Ordenamos los términos iniciando por los de segundo grado

$x^2 + y^2 - 4x - 4y + 5 = 0$ Reducimos los términos independientes

Así obtenemos la forma general de la ecuación de la circunferencia $\boldsymbol{x^2 + y^2 - 4x - 4y + 5 = 0}$

Transformación de la forma general a la forma ordinaria de la ecuación de una circunferencia

Procedimiento

Para obtener la forma ordinaria de la ecuación de la circunferencia a partir de su forma general $x^2 + y^2 + Cx + Dy + = 0$ se siguen los siguientes pasos:

1. Se agrupan los términos de la misma variable y se traspone la constante al lado derecho.
2. Se completan los cuadrados en los términos agrupados del miembro izquierdo, sumando en ambos lados el cuadrado de la mitad del coeficiente de los términos de primer grado.
3. Se suman en el miembro derecho el resultado de los cuadrados encontrados.

4. Se factoriza los trinomios cuadrados perfectos de lado izquierdo y se efectúan las sumas indicadas del lado derecho.

La ecuación del paso 3. es la ecuación ordinaria de la circunferencia en la que se identifican el radio y las coordenadas del centro.

Ejemplo

Determine el centro y radio de la circunferencia, luego grafica en el plano cartesiano la figura que corresponde a la ecuación.

Solución:

a) $x^2 + y^2 - 6x + 8y + 16 = 0$

Siguiendo el procedimiento indicado:

$(x^2 - 6x + \ \ ) + (y^2 + 8y + \ \ ) = -16$ — Por paso 1

$(x^2 - 6x + 3^2) + (y^2 + 8y + 4^2) = -16 + 3^2 + 4^2$ — Para completar el 1er trinomio $(\frac{6}{2})^2 = 3^2$; ahora para el 2do, $(\frac{8}{2})^2 = 4^2$ y sumado los resultados a ambos lados

$(x - 3)^2 + (y + 4)^2 = -16 + 9 + 16$ — Por paso 3

$(x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 9$ — Por paso 4

Luego se compara la ecuación ordinaria de la circunferencia y el resultado obtenido para encontrar el centro $C(h, k)$ y radio de la circunferencia.

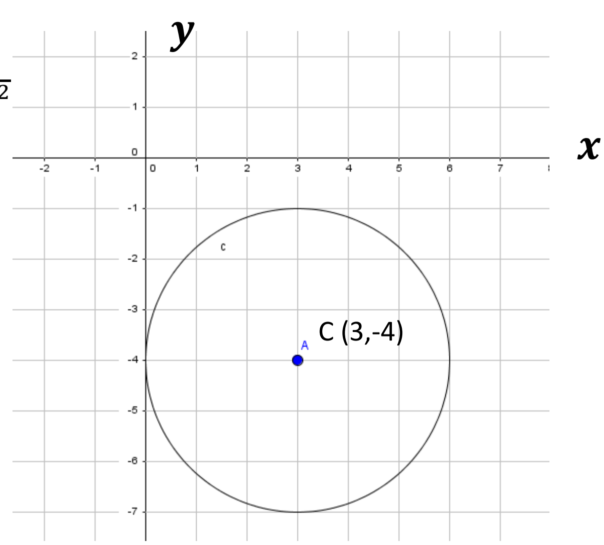
$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2 \quad \wedge \quad (x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 9$

$-h = -3 \quad \wedge \quad -k = 4 \quad$ con $\quad r^2 = 9$

$h = \frac{-3}{-1} \quad \wedge \quad k = \frac{4}{-1} \quad$ con $\quad \sqrt{r^2} = \sqrt{9} = \sqrt{3^2}$

$h = 3 \quad \wedge \quad k = -4 \quad$ con $\quad r = 3$

Es una circunferencia con concentro $C(3, -4)$ y $r = 3$



La grafica de la ecuación de la circunferencia $x^2 + y^2 - 6x + 8y + 16 = 0$, con su ecuación ordinaria $(x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 9$ se muestra a la derecha.

Intersecciones de una circunferencia y una recta secante a esta.

Procedimiento

Para determinar los puntos de intersecciones entre una recta y una circunferencia, se resuelve el sistema de ecuaciones, una lineal y la otra cuadrática, utilizando el método de sustitución, el cual se siguen los siguientes pasos:

1. Se agrupan las ecuaciones de la circunferencia y la recta formando un sistema de ecuaciones.
2. Se sustituye la expresión para la recta en la ecuación de la circunferencia, dando lugar a una ecuación de segundo grado, la cual se resuelve. (El hecho de que esta ecuación tenga dos soluciones reales distintas indica que efectivamente la recta es secante a la circunferencia).
3. Se sustituye las soluciones en la ecuación de segundo grado del paso anterior en la ecuación de la recta para obtener los valores de "y".
4. Con los valores encontrados para "x" y "y" se forman las intersecciones (x, y) de la circunferencia y la recta secante dada.

Ejemplo

Determine los puntos de intersección de la circunferencia $x^2 + y^2 = 2$ con la recta $y = 2x$

Solución:

1. Con las ecuaciones dadas se forma el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 & \Longrightarrow E_1 \\ \quad y = 2x & \Longrightarrow E_2 \end{cases}$$

2. Al sustituir E_2 en E_1 se obtiene una ecuación de segundo grado la cual se debe resolver:

$$x^2 + (2x)^2 = 5$$
$$x^2 + 4x^2 = 5$$

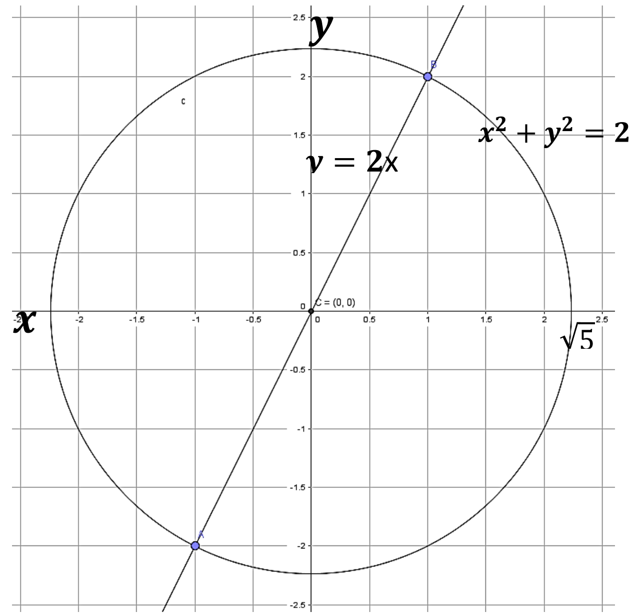
$5x^2 = 5$

$x^2 = \frac{5}{5}$

$x^2 = 1$

$\sqrt{x^2} = \pm\sqrt{1}$

$x = +1 \ \vee \ \ x = -1$



3. Se sustituyen los valores de "x" en E_2:

   Si $x = 1$, entonces $y = 2x$, se tiene que:

   $y = 2$

   Si $x = -1$, entonces $y = -2x$, se tiene que:

   $y = -2$

4. Con los valores anteriores para "x" y "y" se forman los puntos $(1,2)$ y $(-1,-2)$ los cuales son la intersección de la circunferencia y la recta dada.

Para graficar $x^2 + y^2 = 5$, se sabe que: $r^2 = 5$, se donde $\sqrt{r^2} = \sqrt{5}$, así $r = \sqrt{5}$

Intersecciones de una circunferencia y una recta tangente a esta.

Procedimiento

Para determinar los puntos de intersecciones entre una recta y una circunferencia, se resuelve el sistema de ecuaciones, una lineal y la otra cuadrática, utilizando el método de sustitución, el cual se siguen los siguientes pasos:

1. Se agrupan las ecuaciones de la circunferencia y la recta formando un sistema de ecuaciones.
2. Se sustituye la expresión para la recta en la ecuación de la circunferencia, dando lugar a una ecuación de segundo grado, la cual se resuelve. (El hecho de que esta ecuación tenga dos soluciones reales distintas indica que efectivamente la recta es secante a la circunferencia).

3. Se sustituye las soluciones en la ecuación de segundo grado del paso anterior en la ecuación de la recta para obtener los valores de "y".
4. Con los valores encontrados para "x" y "y" se forman las intersecciones (x, y) de la circunferencia y la recta secante dada.
5.

Ejemplo

Determine los puntos de intersección de la circunferencia $x^2 + y^2 = 2$ con la recta $y = x + 2$

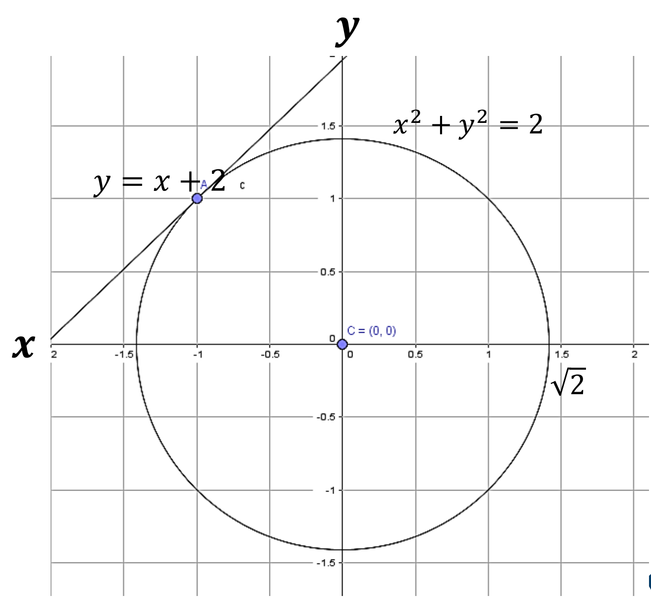
Solución:

1. Con las ecuaciones dadas se forma el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \implies E_1 \\ \quad y = x + 2 \implies E_2 \end{cases}$$

2. Al sustituir E_2 en E_1 se obtiene una ecuación de segundo grado la cual se debe resolver:

$x^2 + (x+2)^2 = 2$	Se desarrolla el cuadrado del binomio
$x^2 + x^2 + 4x + 4 = 2$	Se reducen términos semejantes y se traspone el 2 al MI
$2x^2 + 4x + 4 - 2 = 0$	Resultado de reducir las constantes
$2x^2 + 4x + 2 = 0$	Se divide por dos ambos lados
$x^2 + 2x + 1 = 0$	Se factoriza el trinomio
$(x+1)^2 = 0$	Se extrae la raíz cuadrada a ambos lados
$\sqrt{(x+1)^2} = \sqrt{0}$	Por paso anterior
$x + 1 = 0$	Por transposición del término 1
$x = -1$	



3. Se sustituye en E_2 el valor encontrado anteriormente

Como $x = -1$, para $y = x + 2$, se tiene que:

$$y = -1 + 2 = 1$$

4. Con los valores anteriores se forma el punto $(-1{,}1)$, el cual es la intersección de la circunferencia y la recta dada.

Para graficar $x^2 + y^2 = 2$, se sabe que: $r^2 = 2$, se donde $\sqrt{r^2} = \sqrt{2}$, así $r = \sqrt{2}$

Practique lo aprendido

I. Resuelve los siguientes ejercicios en su cuaderno de forma individual o en equipo:

01. Encuentre las intersecciones de cada circunferencia con la recta secante dada:

a) $x^2 + y^2 = 8, \quad y = x$ b) $x^2 + y^2 = 30, \quad y = 3x$ c) $x^2 + y^2 = 20, \quad y = 2x$

02. Encuentre las intersecciones de cada circunferencia con la recta tangente o el punto dado:

a) $x^2 + y^2 = 5, \quad y = 2x + 5$ d) $x^2 + y^2 = 13, \quad P(2, -3)$

b) $x^2 + y^2 = 2, \quad y = -x + 2$

03. Toma medidas a los objetos que se menciona y determine la ecuación general con centro en el origen los cuales son:

a) DVD

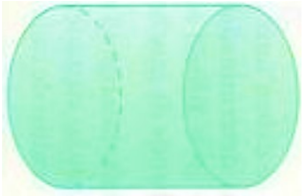
b) Un rin de carro

c) Una moneda de C$ 5

d) Una tapa de pote de leche

e) Una rueda de bicicleta

04. Halle el volumen de un cilindro cuya base tiene por ecuación $x^2 + y^2 + 6x + 10y + 9 = 0$; y cuya altura mide 2 unidades.



Guía de autoestudio

A continuación, se proponen las siguientes actividades para que realice su autoestudio.

1. Encuentre las intersecciones de cada circunferencia con la recta secante dada:

   a) $x^2 + y^2 = 5,\ \ 3x + y + 5 = 0$ b) $x^2 + y^2 = 13,\ \ x + 5y - 13 = 0$

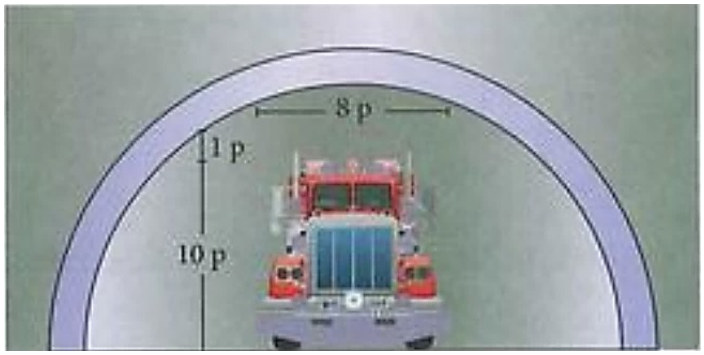
   c) $x^2 + y^2 = 17,\ \ 3x + 5y - 17 = 0$

02. Encuentre las intersecciones de cada circunferencia con la recta tangente o el punto dado:

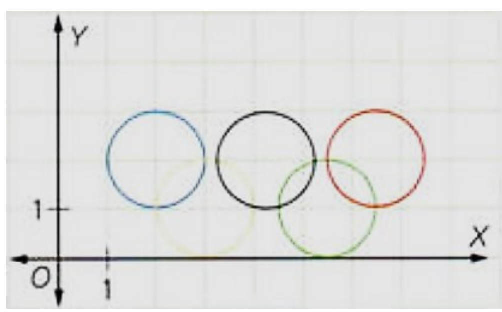
   a) $(x+3)^2 + (y+1)^2 = 4,\ \ P(-1,-1)$ b) $x^2 + y^2 = 18,\ \ \ y = x + 6$

   c) $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 17,\ \ P(3,1)$

03. El **MTI** planea construir un túnel semicircular que pasa a través de una posible montaña ubicada en Jalapa. El túnel debe ser lo suficientemente grande como para que un camión de 8 pies de ancho y 10 pies de alto pase por el centro, teniendo 1 pie de espacio entre la esquina superior del camión y el techo del túnel (como muestra el plano en la figura). Determine el radio mínimo que debe tener el túnel.



04. Un emprendedor de bambú de la zona norte de nuestro país Nicaragua, piensa en el diseño de los aros olímpicos, se utiliza una circunferencia que se traslada y se pinta de color diferente, tal como lo muestra la figura. ¿Cuál es la ecuación general y la ecuación canónica del arco de color azul?



Encuentro 5:

La Parábola

- La Parábola con foco en el eje "x"
- La Parábola con foco en el eje "y"
- Elementos de la Parábola

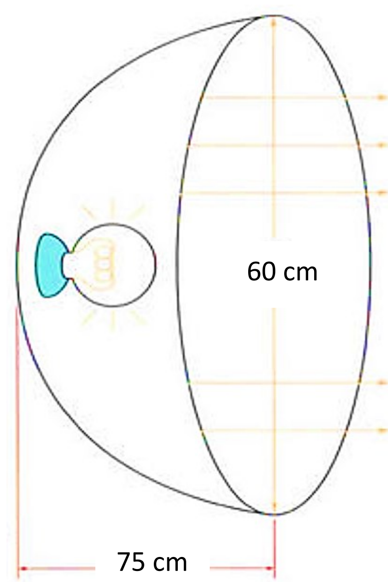
Descripción

Estimado estudiante, en este encuentro estudiaremos las formas de expresar una parábola y sus elementos, en la solución de situaciones de su entorno.

A continuación, te presentamos la siguiente información referida al contenido en estudio para que la leas y analices cada uno de los ejemplos desarrollados.

Iniciemos analizando la siguiente situación

En la escuela "Rubén" hay un problema de iluminación por las noches, y para mejorar la situación, se planea construir una lámpara parabólica móvil para el vigilante. Para ello cuenta con un recipiente parabólico de 60 centímetros de diámetro y 75 centímetros de altura. ¿A qué distancia del centro del disco debe colocar el foco para que refleje la luz en una sola dirección?



Solución:

Para darle solución podemos iniciar que el diámetro es:

$D = 2r, luego\ el\ radio\ es, r = \frac{D}{2},$

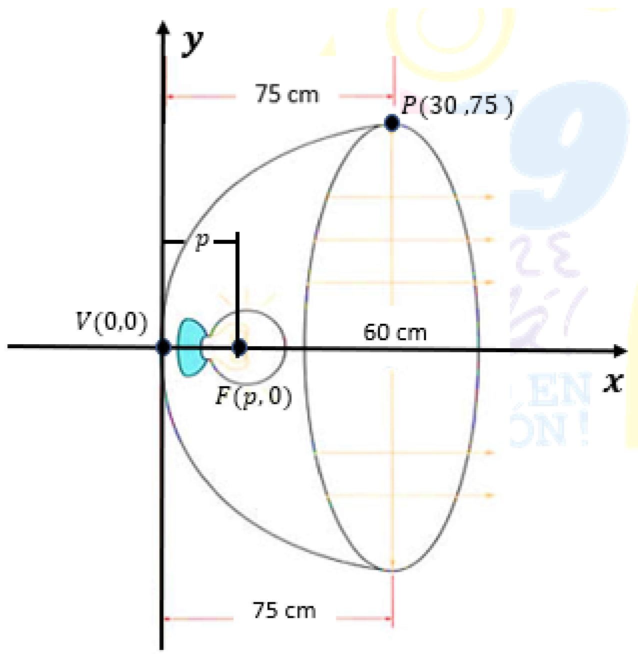
Sustituyendo $D = 60\ cm$ se tiene: $r = \frac{60\ cm}{2} = 30\ cm$

Luego usando la **Nota informativa**: $y^2 = 4px$, y del siguiente grafico se puede apreciar que del punto $P(30{,}75)$, $x = 75 \quad \wedge \quad y = 30$

Sustituyendo los valores en $y^2 = 4px$.

Se tiene que:

$$y^2 = 4px$$



$$(30)^2 900 = 300$$

$$p = 4p(75)$$

$$\frac{900}{300} = p$$

$$3 = p$$

R: El foco se debe colocar a 3 cm del vértice.

Parábola con foco en el eje "x"

La ecuación que determina el espacio geométrico de una parábola $y^2 = 4px$, en esta ecuación, el vértice de la parábola siempre será en el origen $(0{,}0)$.

Elementos de la parábola $y^2 = 4px,$ con $p \neq 0$

1. Tiene foco $F(p, 0)$ y directriz $x = -p$
2. El eje de simetría es el eje "x"
3. El vértice es $(0{,}0)$
4. $Si\ p > 0$, la parábola se abre hacia la derecha y si $p < 0$, la parábola se abre hacia la izquierda.

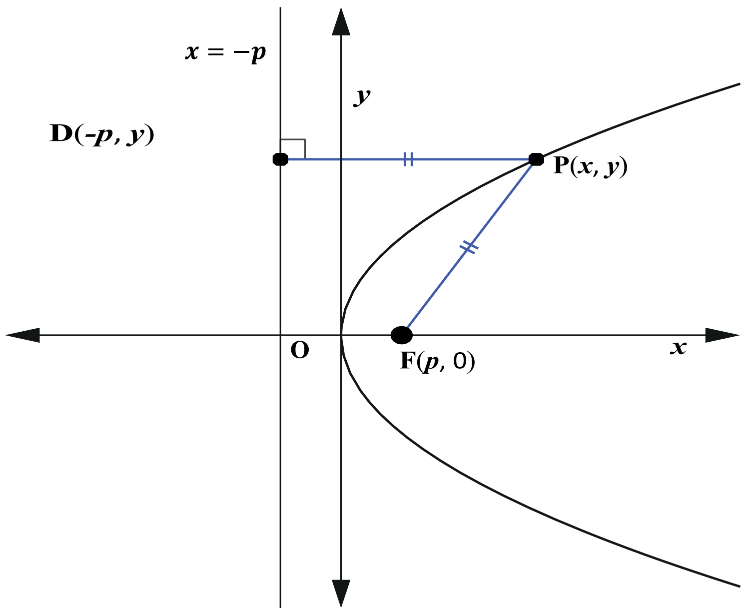


Figura de la parábola con foco en el eje "x" y vértice en el origen.

Ejemplo

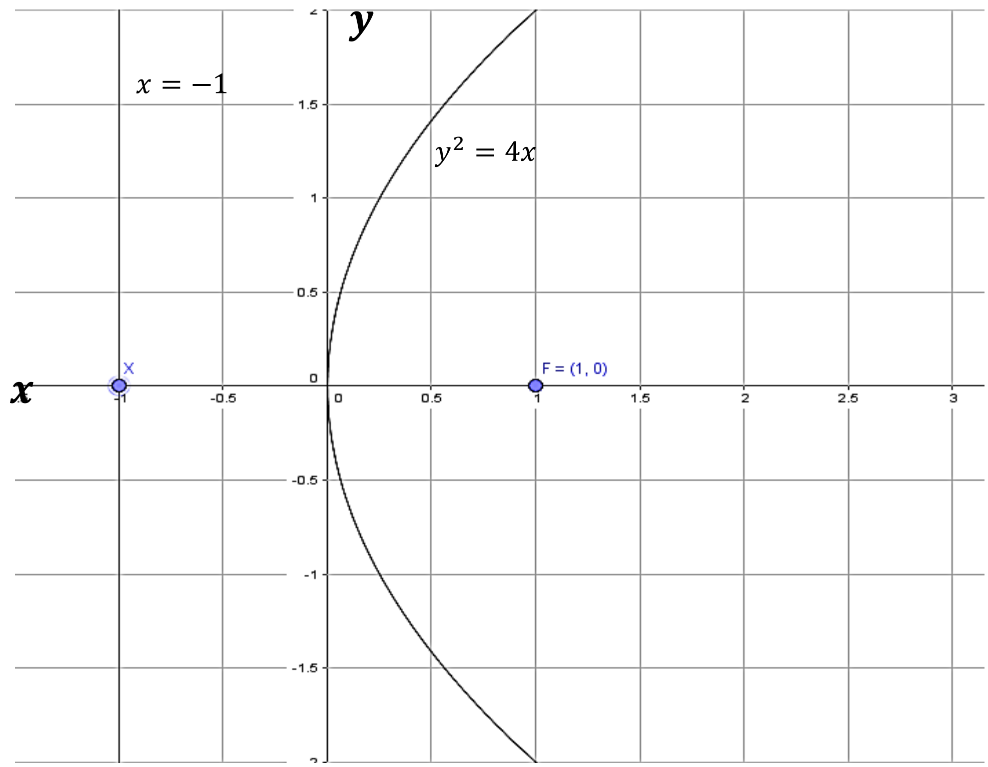
Determine la ecuación de las parábolas con los siguientes elementos:

a) Vértice en el origen y foco $F(1{,}0)$ y directriz $x = -1$

Solución:

Se tiene los elementos: $F(1{,}0)$, de aquí que $F(p, 0)$, de donde $p = 1$, luego en la ecuación:

$y^2 = 4px$
$y^2 = 4(1)x$
$y^2 = 4x$

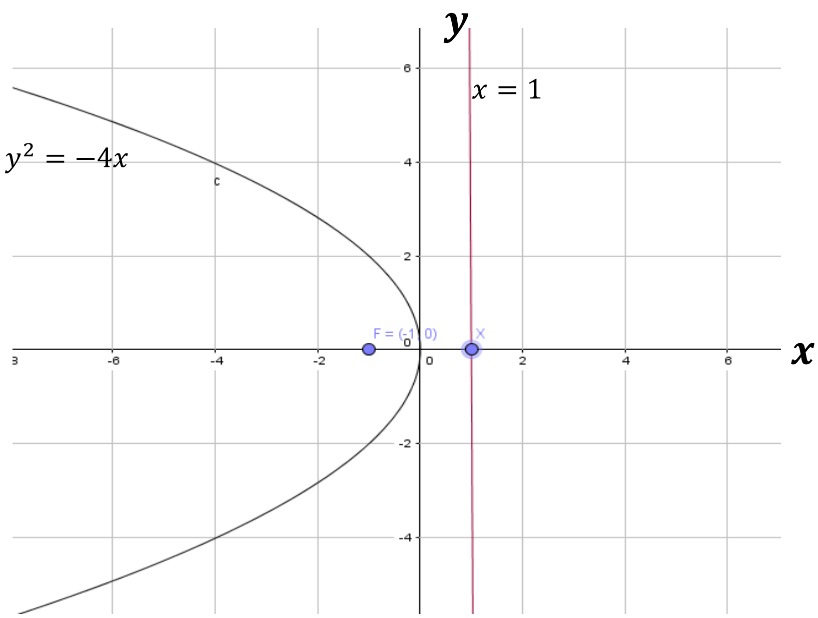


b) Vértice en el origen y foco $F(-1{,}0)$ y directriz $x = 1$

Solución:

Se tiene los elementos: $F(-1{,}0)$, de aquí que $F(p, 0)$, de donde $p = -1$, luego en la ecuación: $y^2 = 4px$

$y^2 = 4(-1)x$
$y^2 = -4x$



Parábola con foco en el eje “y"

La ecuación que determina el espacio geométrico de una parábola $x^2 = 4py$, en esta ecuación, el vértice de la parábola siempre será en el origen $(0,0)$.

Elementos de la parábola $y^2 = 4px$, con $p \neq 0$

1. Tiene foco $F(0, p)$ y directriz $y = -p$
2. El eje de simetría es el eje “y”
3. El vértice es $(0,0)$
4. $Si\ p > 0$, la parábola se abre hacia arriba y si $p < 0$, la parábola se abre hacia abajo.

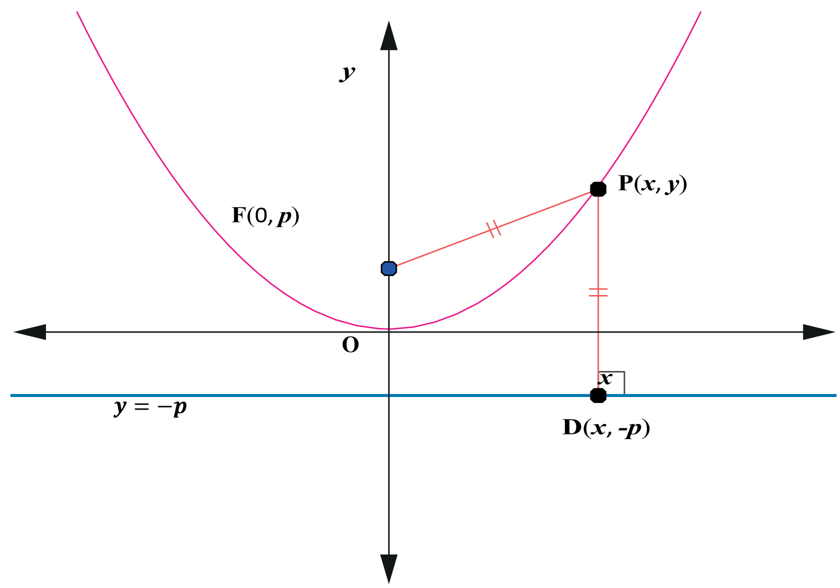


Figura de la parábola con foco en el eje "y" y vértice en el

Ejemplo

Encuentre las ecuaciones de las parábolas con los siguientes elementos:

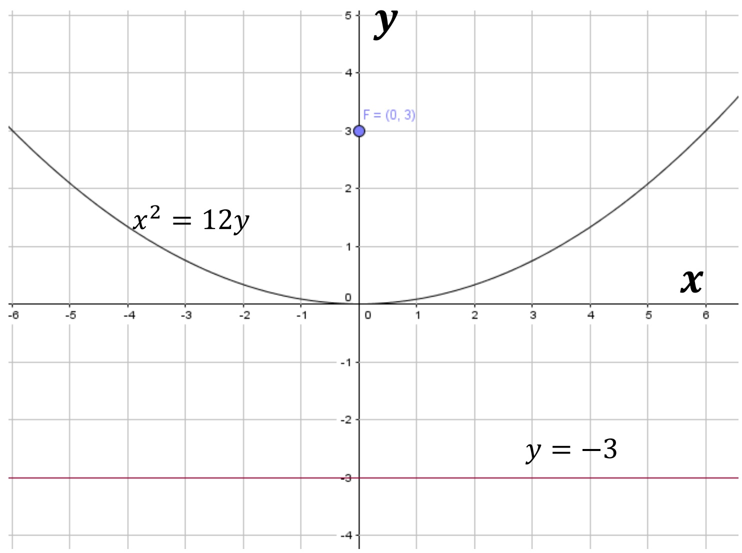
a) Vértice en el origen, Foco $F(0,3)$ y directriz $y = -3$

Solución:

Se tiene los elementos: $F(0{,}3)$, de aquí que $F(0, P)$, de donde $p = 3$, luego en la ecuación: $x^2 = 4py$

$x^2 = 4(3)y$

$y^2 = 12y$



b) Vértice en el origen y foco $F(0, -3)$ y directriz $y = 3$

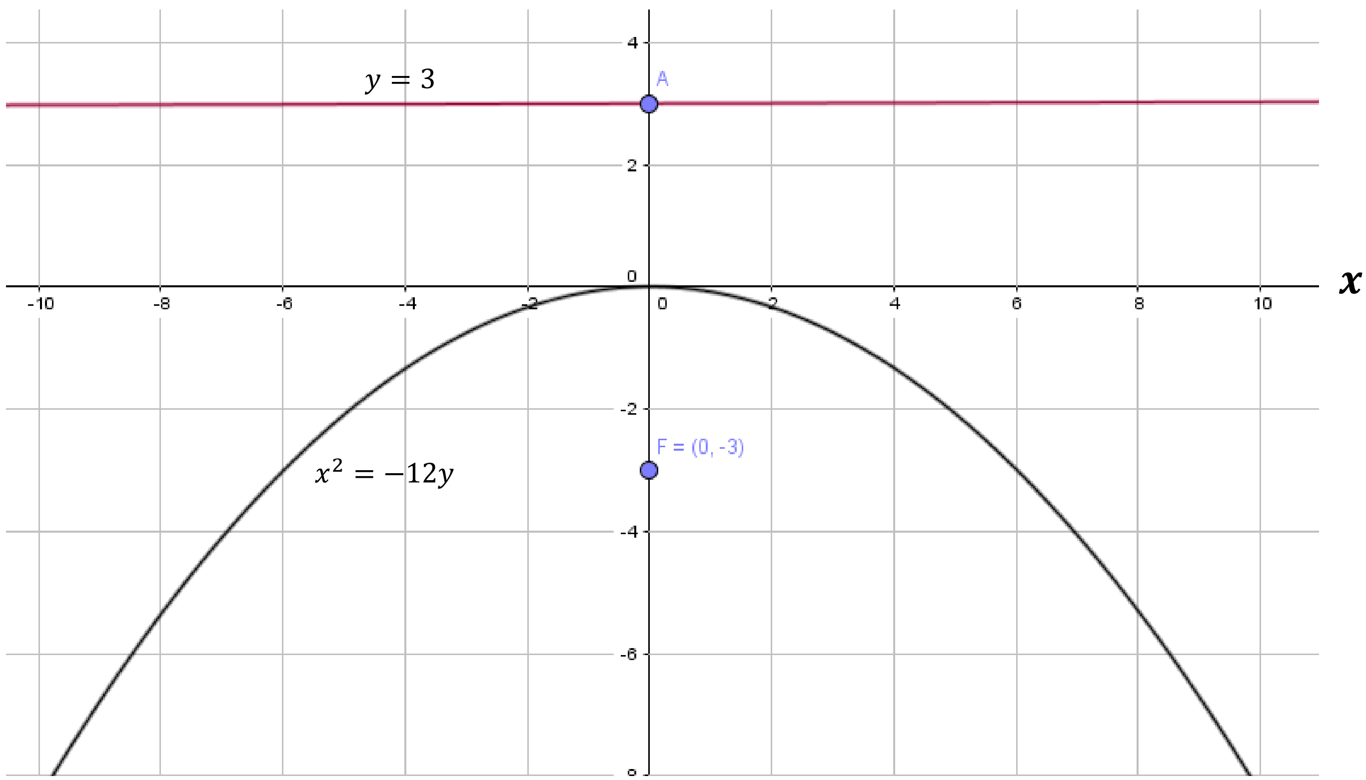
Solución:

Se tiene los elementos: $F(0, -3)$, de aquí que $F(0, p)$, de donde $p = -3$, luego en la ecuación: $x^2 = 4py$

$x^2 = 4(-3)y$

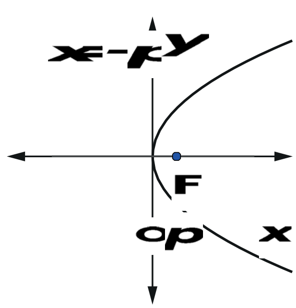
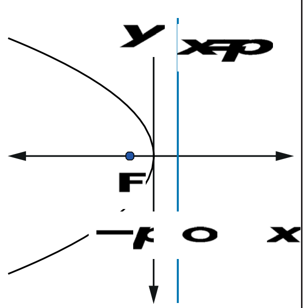
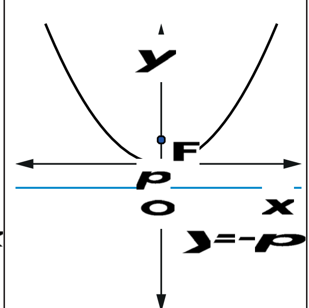
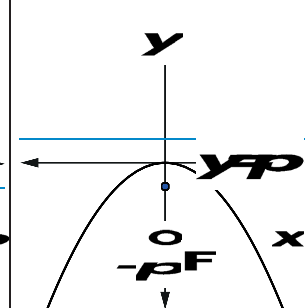
$x^2 = -12y$

y



Elementos de la Parábola

Resumen de propiedades de la parábola ($p > 0$):

Forma	$y^2 = 4px$	$y^2 = -4px$	$x^2 = 4py$	$x^2 = -4py$
Gráfica				
Vértice	(0, 0)	(0, 0)	(0, 0)	(0, 0)
Foco	$F(p, 0)$	$F(-p, 0)$	$F(0, p)$	$F(0, -p)$
Directriz	$x = -p$	$x = p$	$y = -p$	$y = p$

Ejemplo

Encuentre el vértice, eje, foco y directriz de las siguientes parábolas:

a) $y^2 = 4x$

Solución:

La parábola $y^2 = 4x$, tiene vértice $(0,0)$.

Se utiliza la ecuación $y^2 = 4px$ para encontrar "p":

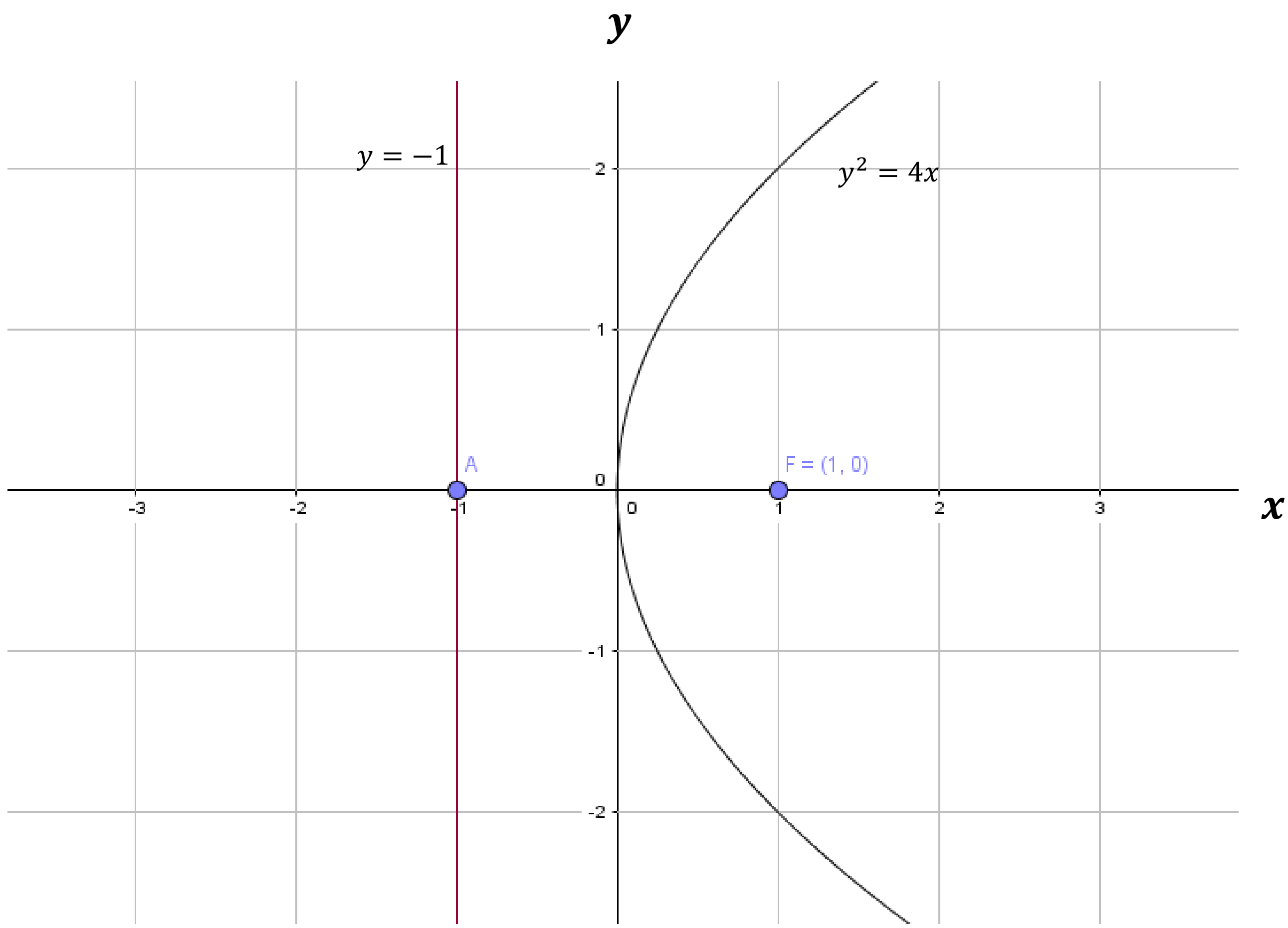
$y^2 = 4x \quad \wedge \quad y^2 = 4px$, se tiene que al igualar las dos expresiones se tiene:

$4x = 4px$

$\frac{4x}{4x} = p$

$1 = p$

Entonces se tiene el valor de $p = 1$, por tanto, el eje de simetría de la parábola es el eje "x", el foco $F(p, 0)$, así $F(2,0)$ y la directriz $x = -p$, así, $x = -1$, la grafica se observa a la derecha.



a) $x^2 = -8y$

Solución:

La parábola $x^2 = -8y$, tiene vértice $(0,0)$.

Se utiliza la ecuación $x^2 = 4py$ para encontrar "p":

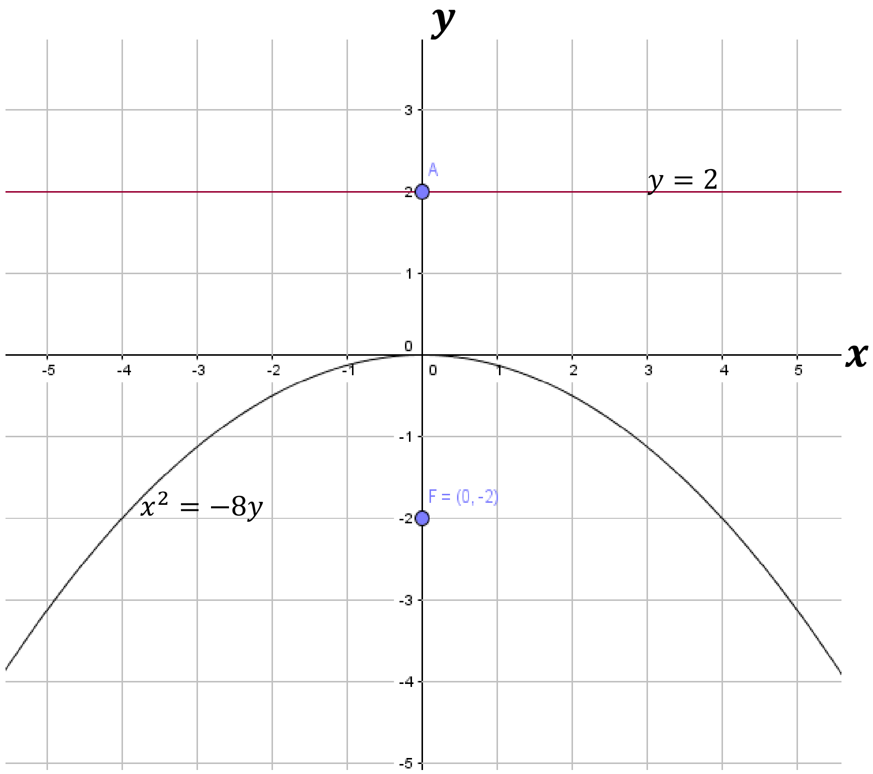
$x^2 = -8y \quad \wedge \quad x^2 = 4py$, se tiene que al igualar las dos expresiones se tiene:

$-8y = 4py$

$\frac{-8y}{4y} = p$

$-2 = p$

Entonces se tiene el valor de $p = -2$, Por tanto, el eje de simetría de la parábola es el eje "y", el foco $F(0, -p)$, así $F(0, -2)$ y la directriz $y = -p$, así, $y = -(-2) = 2$, la grafica



Practica lo aprendido

I. Resuelve los siguientes ejercicios en su cuaderno de forma individual o en equipo:

a) Determine en cada inciso la ecuación de la parábola con los elementos dados:

1) Foco $F(2,0)$ y directriz en $x = -2$

3) Foco $F(3,0)$ y directriz $x = -3$

b) Determine en cada inciso de la ecuación de la parábola con los elementos dados:

1) Foco $F(0,2)$ y directriz $y = -2$

3) Foco $F(0,2)$ y directriz $y = 2$

c) Encuentre el vértice, foco, eje y directriz de las siguientes parábolas:

1) $y^2 = 12x$

3) $x^2 = -16y$

5) $x^2 = -y$

II. Resuelve las siguientes situaciones problemáticas de forma individual o en equipo:

1) José se encuentra en el campo en el rebaño de vacas, y ovejas. El monte está muy seco por lo que evita recoger leña y evitar un incendio, para ello lleva un recipiente parabólico de metal, de modo que refleje los rayos solares en un punto fijo (el foco). Determine a qué distancia del vértice del recipiente debe colocar José la parrilla para cocinar, si este tiene un metro de diámetro y 0.25 metros de altura.

Figura del ejercicio 2

2) Un joven en una loma decide lanzar hacia arriba una piedra describiendo un arco de parábola y cayendo la piedra a una distancia de 40 metros del punto donde fue lanzada. Determine el valor de "p" de la parábola, si la altura máxima que alcanzó la piedra es de 28 metros.

Guía de autoestudio

A continuación, se proponen las siguientes actividades para que realice su autoestudio.

Resuelve los siguientes ejercicios en su cuaderno de forma individual o en equipo:

1. Determine en cada inciso la ecuación de la parábola con los elementos dados:

a) Foco $F(-3,0)$ y directriz en $x = 3$ b) Foco $F(-4,0)$ y directriz $x = 4$

2. Determine en cada inciso de la ecuación de la parábola con los elementos dados:

a) Foco $F(0,4)$ y directriz $y = -4$ b) Foco $F(0-4)$ y directriz $y = 4$

3. Encuentre el vértice, foco, eje y directriz de las siguientes parábolas:

a) $y^2 = \frac{1}{2}x$ b) $x^3 = \frac{1}{8}y$ c) $y^2 = -x$

4. Joaquín esta está construyendo una cabaña con bambú, el cual el arco de la cabaña tiene forma de parábola. La altura del arco es de 30 pies y el ancho de la base es de 20pies. ¿Qué ancho tiene la parábola a 10 pies por arriba de la base del arco?

   (Sugerencia: Trace primero la parábola con vértice $V(0,0)$, determine la forma por utilizar, identifique "p", y escriba después la ecuación de la parábola)

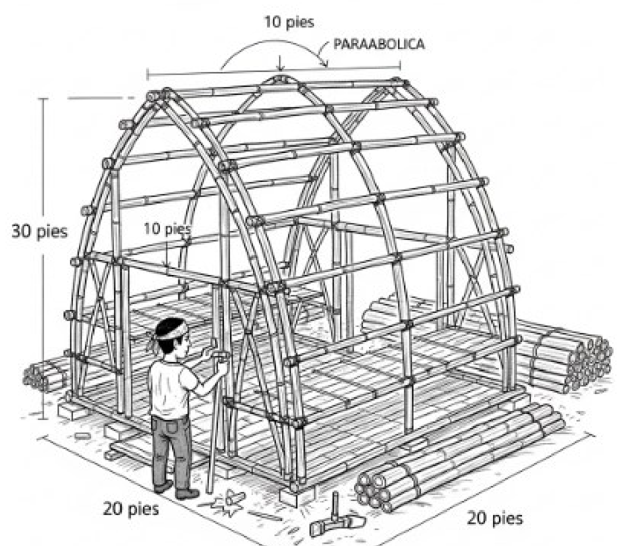


Figura del ejercicio 3

Encuentro 6:

Puntos de intersección de una parábola vertical u horizontal y una recta

- Aplicaciones de la Parábola

Descripción

Estimado estudiante, en este encuentro estudiaremos los puntos de intersección de una parábola vertical u horizontal y una recta y sus aplicaciones.

A continuación, te presentamos la siguiente información referida al contenido en estudio para que la leas y analices cada uno de los ejemplos desarrollad.

Iniciemos analizando las siguientes situaciones

Ejemplo 1

a) Encuentre los puntos de intersección de la recta $y = -x + 3$ con la parábola $x^2 = 4y$
b) La recta $y = x - 2$ con la parábola $y^2 = x$

Solución inciso a:

Agrupando el sistema de ecuaciones: $\begin{cases} y = -x + 3 \\ x^2 = 4y \end{cases}$, luego se sustituye el valor de "y" en la ecuación cuadrática $x^2 = 4y$, obteniendo:

$$x^2 = 4y$$

$$x^2 = 4(-x + 3)$$

$$x^2 = -4x + 12$$

$$x^2 + 4x - 12 = 0$$

Se resuelve la ecuación anterior por factorización y se obtiene:

$(x+6)(x-2)=0$

$x+6=0 \quad \vee \quad x-2=0$

$x=-6 \quad \vee \quad x=2$

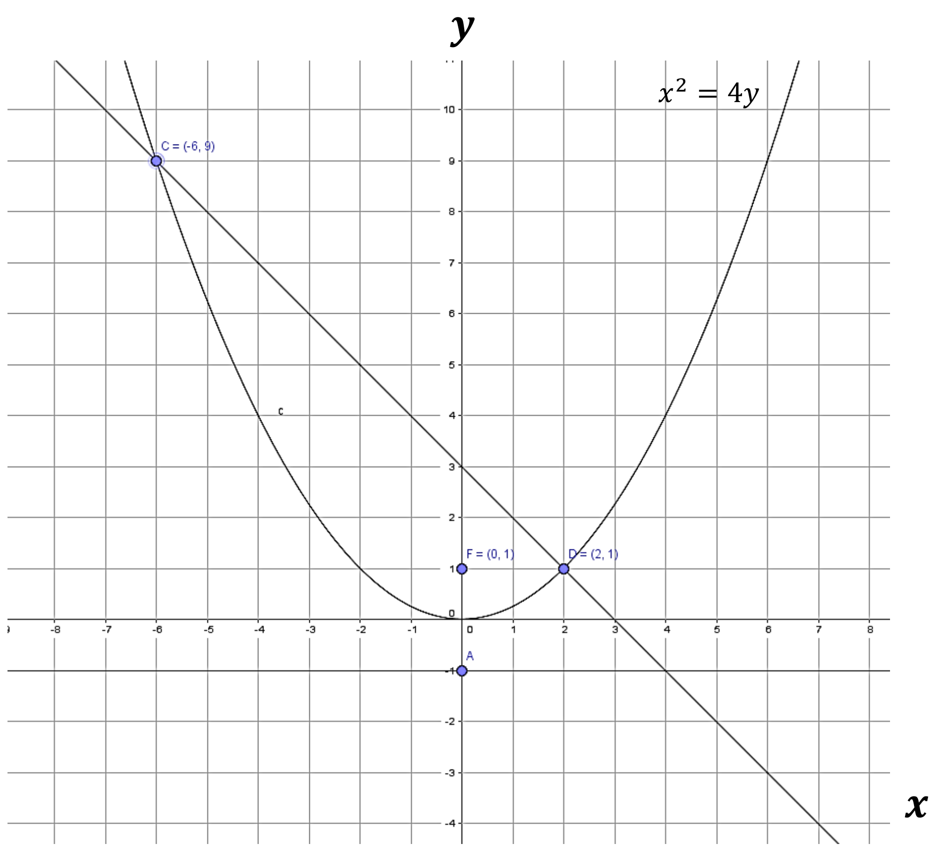
Finalmente, en $y=-x+3$ se sustituyen los valores encontrados,

Para $x=-6, \quad y=-(-6)+3=6+3=9$

Para $x=2, \quad y=-2+3=1$

Por tanto, los puntos de intersección son: $(-6,9),(2,1)$

-Para graficar se debe tener en cuenta que:



Se utiliza la ecuación $x^2=4py$ para encontrar "p":

$x^2=4y \quad \wedge \quad x^2=4py$, se tiene que al igualar las dos expresiones se tiene:

$y=-x+3$

$4y=4py$

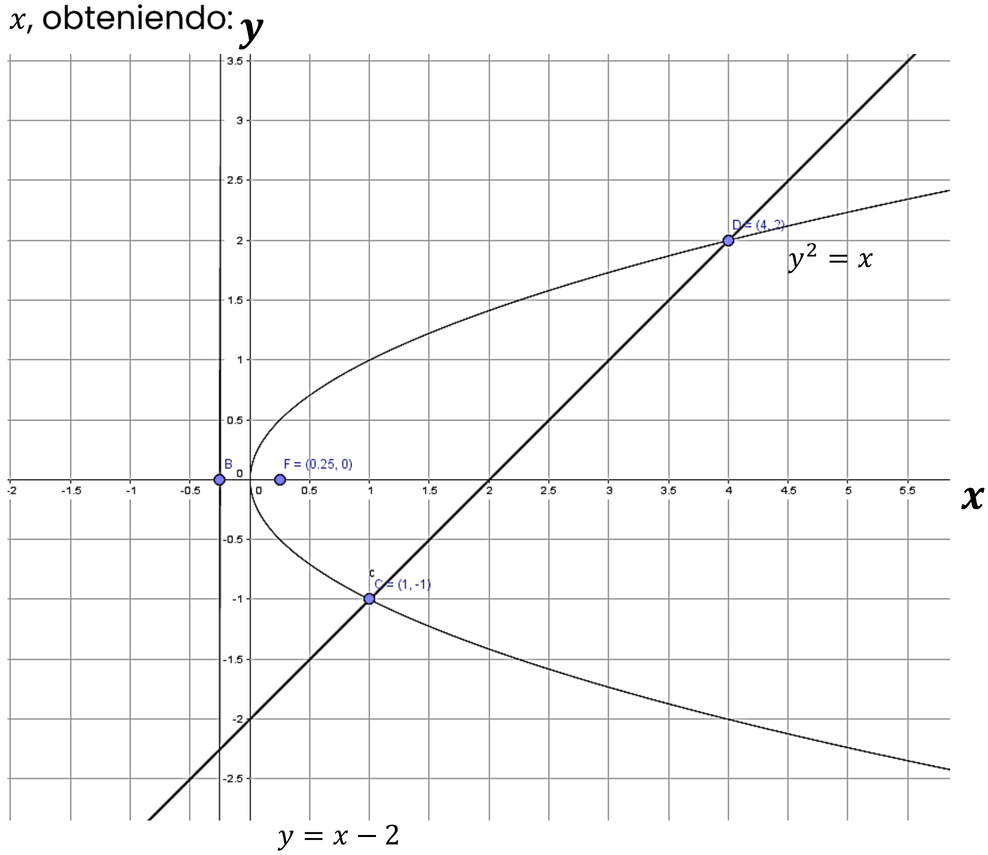
$\frac{4y}{4y}=p$

$1=p$, ahora se tiene que el Foco es $F(0,p)$.

Solución inciso b:

Agrupando el sistema de ecuaciones: $\begin{cases} y = x - 2 \\ y^2 = x \end{cases}$, luego se sustituye el valor de "y" en la ecuación cuadrática $y^2 = x$, obteniendo:

$y^2 = x$
$(x-2)^2 = x$
$x^2 - 4x + 4 = x$
$x^2 - 4x - x + 4 = 0$
$x^2 - 5x + 4 = 0$
$(x-1)(x-4) = 0$
$x - 1 = 0 \quad \vee \quad x - 4 = 0$
$x = 1 \quad \vee \quad x = 4$



Finalmente, en $y = x - 2$ se sustituyen los valores encontrados,

Para $x = 1, \quad y = 1 - 2 = -1$

Para $x = 4, \quad y = 4 - 2 = 2$

Por tanto, los puntos de intersección son: $(1, -1), (4,2)$

Para graficar se debe tener en cuenta que:

Se utiliza la ecuación $y^2 = 4px$ para encontrar "p":

$y^2 = x \quad \wedge \quad y^2 = 4px$, se tiene que al igualar las dos expresiones se tiene:

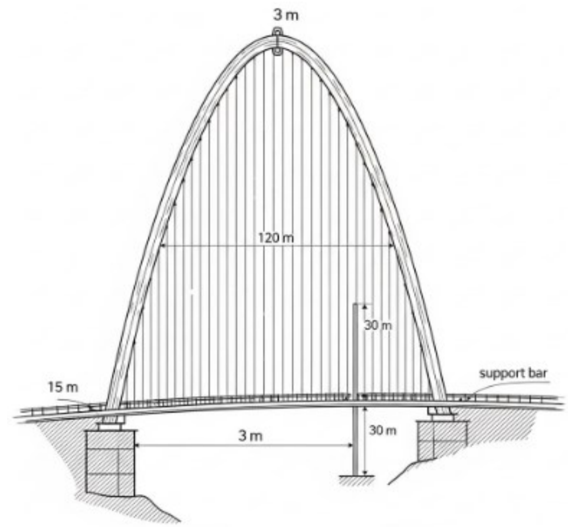
$x = 4px$

$\frac{x}{4x} = p$

$\frac{1}{4} = p$, ahora se tiene que el Foco es $F(0, p)$.

Ejemplo 2. Analiza la siguiente situación relacionada a las aplicaciones de las parábolas

El cable de un puente colgante tiene la forma parabólica y está sujeta a dos bases de 15 m de altura, situadas a 120 m una de la otra. Si el punto más bajo del cable está a 3m del piso del puente. Determine la longitud de la barra de soporte que está a 30 m a la derecha del punto más bajo del cable y en posición vertical.



Solución:

Se hace coincidir un sistema de coordenadas cartesianas sobre la figura y observamos que el vértice es (0,0), la parábola se abre hacia arriba por lo que la ecuación es:

$x^2 = 4py$, además el punto $(60{,}12)$ es parte de la parábola, luego podemos sustituir:

$x^2 = 4py \quad con\ el\ punto \quad (60{,}12), \qquad de\ donde\ x = 60\ , y = 12$

$(60)^2 = 4p(12)$

$3\,600 = 48p$

$\frac{3\,600}{48} = p$

$\frac{3\,600}{48} = p$

$75 = p$

Ahora sustituyendo $p = 75$ en la ecuación $x^2 = 4py$

$x^2 = 4(75)p$

se tiene: $x^2 = 300y$

Como se quiere la longitud de las barras cuando $x = 30m$

$(30)^2 = 300y$

$900 = 300y$

$\frac{900}{300} = y$

$3 = y$

El punto más bajo está a 3m del piso, por lo que la longitud total de la barra será:

$3m + 3m = 6m$

Practica lo aprendido

I. Resuelve los siguientes ejercicios en su cuaderno de forma individual o en equipo:

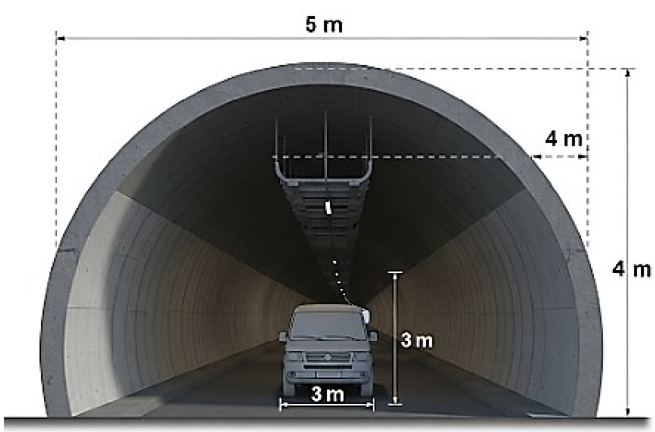
1. Encuentre los puntos de intersección de:

a) La recta $y = 3x - 2$ con la parábola $x^2 = y$

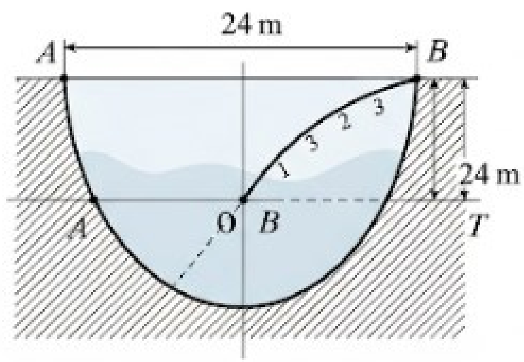
b) La recta $y = 2x - 9$ con la parábola $x^2 = -3y$

II. Resuelve las siguientes situaciones problemáticas de forma individual o en equipo:

1. Un túnel de una carretera tiene la forma de un arco parabólico. Su ancho es de 5m y su altura es de 4m. ¿Cuál es la altura máxima que podría tener un vehículo de transporte de 3m de ancho, para poder pasar por el túnel?



2. Un depósito de agua tiene una sección transversal parabólica. Cuando el nivel AB del agua alcanza una altura de 6m, su longitud AB mide 24 m; cuando el nivel del agua desciende de 4m. Calcule la longitud RT del nivel del agua.



Guía de autoestudio

A continuación, se proponen las siguientes actividades para que realice su autoestudio.

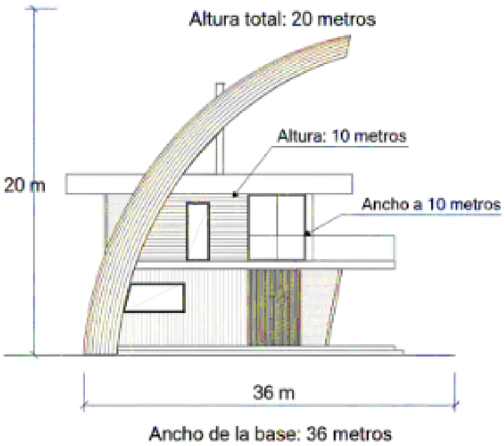
I. Resuelve los siguientes ejercicios en su cuaderno Encuentre los puntos de intersección de:

a) La recta $y = x + 6$ con la parábola $y^2 = -4x$

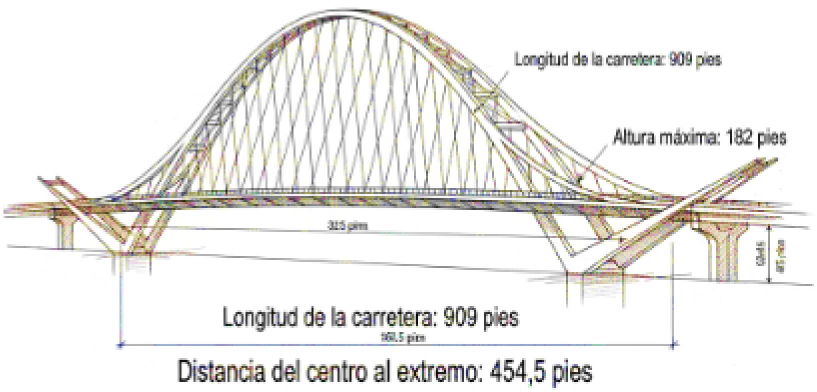
b) La recta $y = -x - 2$ con la parábola $y^2 = 6x$

II. Resuelve las siguientes situaciones problemáticas

1. Una casa tiene la forma de un arco parabólico tiene una altura de 20m y en la base 36m de ancho. Si el vértice está en el origen. ¿A qué altura, sobre la base, tiene un ancho de 10m?



2. Con motivos de unir dos ciudades se quiere construir un puente parabólico con ecuación $x^2 = 1135y$. La carretera horizontal del puente mide 909 pies y el punto más alto del puente es de 182 pies sobre el centro de la carretera. a) ¿Cuál es la distancia horizontal de la carretera desde el centro del puente hasta un extremo del puente? b) Considere que el punto más alto del puente está en el origen. Explique que representa "x" y "y" en la ecuación $x^2 = 1135y$. ¿Cómo se utiliza esta ecuación en el diseño y construcción de puentes?



Encuentro 7:

Elipse

- Definición y Elementos
- Ecuación de la elipse con focos en el eje "x"
- Ecuación de la elipse con focos en el eje "y

Descripción

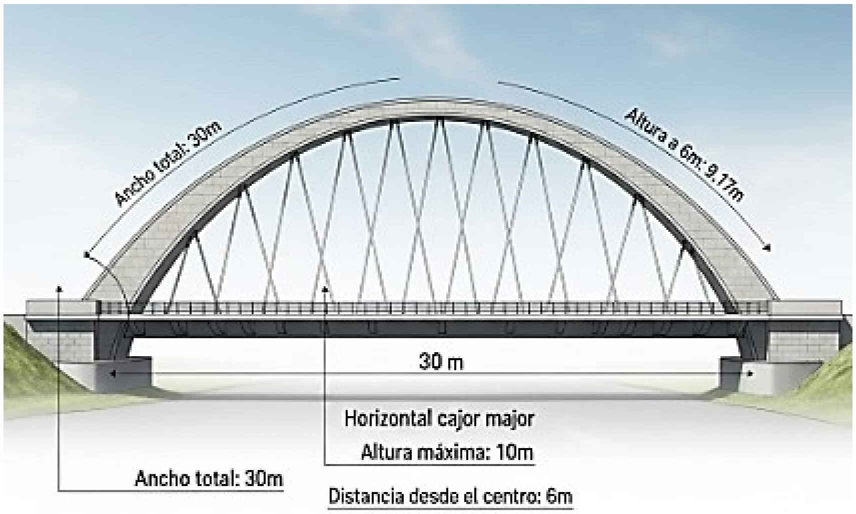
Estimado estudiante, en este encuentro estudiaremos las formas de expresar una elipse y sus elementos en la solución de situaciones de la vida cotidiana.

A continuación, te presentamos la siguiente información referida al contenido en estudio para que la leas y analices cada uno de los ejemplos desarrollados.

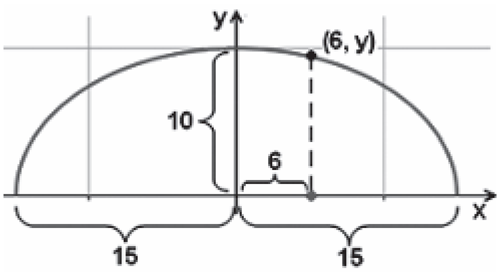
Partamos analizando la siguiente situación

1) El arco de un puente es semielíptico, con eje mayor horizontal. La base tiene 30 metros y su parte más alta con respecto a la Tierra es 10 metros. Determine la altura del arco a 6 metros del centro de la base.

Solución:



Bosquejo del Problema



Con los datos del bosquejo del problema podemos darle la solución:

Utilizando la nota informativa sobre la ecuación de la elipse se tiene:

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ de aquí se obtiene: $a = 15, b = 10$, sustituyendo en la ecuación de la elipse con focos en el eje "x":

$$\frac{x^2}{(15)^2} + \frac{y^2}{(10)^2} = 1$$

ahora $\frac{x^2}{(15)^2} + \frac{y^2}{(10)^2} = 1$ lo que queremos encontrar es la altura "y", $cuando\ x = 6$, sustituyendo el valor de "x" en la ecuación:

$$\frac{(6)^2}{225} + \frac{y^2}{(10)^2} = 1$$

$$\frac{36}{225} + \frac{y^2}{(10)^2} = 1$$

$$\frac{y^2}{(10)^2} = 1 - \frac{36}{225}$$

$$\frac{y^2}{(10)^2} = \frac{225 - 36}{225}$$

$$\frac{y^2}{(10)^2} = \frac{189}{225}$$

$$y^2 = \frac{189}{225}(10^2)$$

$$\sqrt{y^2} = \sqrt{\frac{189 * (10)^2}{(15)^2}}$$

$$y = \sqrt{\frac{3^2 * 21 * (10)^2}{(15)^2}}$$

$$y = \frac{3 * 10}{15}\sqrt{21}$$

$$y = 2\sqrt{21}$$

R: Se concluye que la altura del arco a 6 metros del centro de la base es de $2\sqrt{21}$ metros.

Definición y Elementos de la elipse

La elipse es el lugar geométrico de los puntos del plano tales que la suma de sus distintas distancias a dos puntos fijos, llamados focos, es constante.

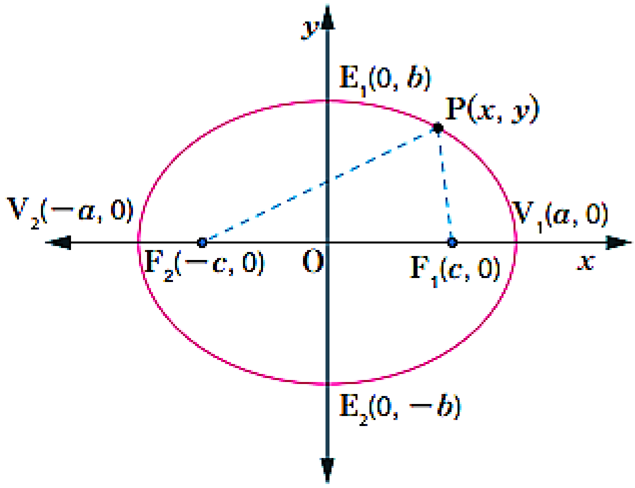
Elementos de la elipse:
-Los focos $F_1(c,0)$ y $F_2(-c,0)$ntro
-El centro C, es el punto medio del segmento que une los dos focos.
-Dos vértices $V_1(a,0)$ y $V_2(-a,0)$
-Eje mayor es el segmento que une los vértices V_1 y V_2, su longitud es $2a$. El eje menor es el segmento que une los extremos E_1 y E_2, con longitud $2b$.

Elipse con foco en el eje "x"

La ecuación que determina el lugar geométrico de una elipse está dada por: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

Elementos de la elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, en donde $a>b>0$

1. Tiene dos vértices $V_1(a,0)$ y $V_2(-a,0)$ y dos extremos $E_1(0,b)$ y $E_2(0,-b)$.
2. El eje mayor y el eje menor están ubicados en los ejes "x" y "y".
3. El eje mayor contiene los dos focos $F_1(c,0)$ y $F_2(-c,0)$, con $c>0$.
4. Se da la relación $c^2=a^2-b^2$ entre a,b,c. Por tanto $c=\sqrt{a^2-b^2}$



Ejemplo

Determine la ecuación de la elipse cuyos focos son $F_1(3,0)$ y $F_2(-3,0)$ y vértice $V_1(5,0)$ y $V_2(-5,0)$.

Solución:

-Los focos y vértice están ubicados en el eje "x", entonces el eje mayor esta ubicado en este, observemos que:

$F_1(3,0)$ y $F_2(-3,0)$ y $V_1(5,0)$ y $V_2(-5,0)$, se sabe entonces que:

$F_1(c, 0)$ y $F_2(-c, 0)$ $V_1(a, 0)$ y $V_2(-a, 0)$, así podemos apreciar los valores respectivos.

de: $c = 3 \quad \wedge \quad a = 5$, estos valores se sustituyen en la expresión: $c^2 = a^2 - b^2$, para encontrar el valor de "b".

$$c^2 = a^2 - b^2$$

$$b^2 = a^2 - c^2$$

$$\sqrt{b^2} = \sqrt{a^2 - c^2}$$

$$b = \sqrt{a^2 - c^2}$$

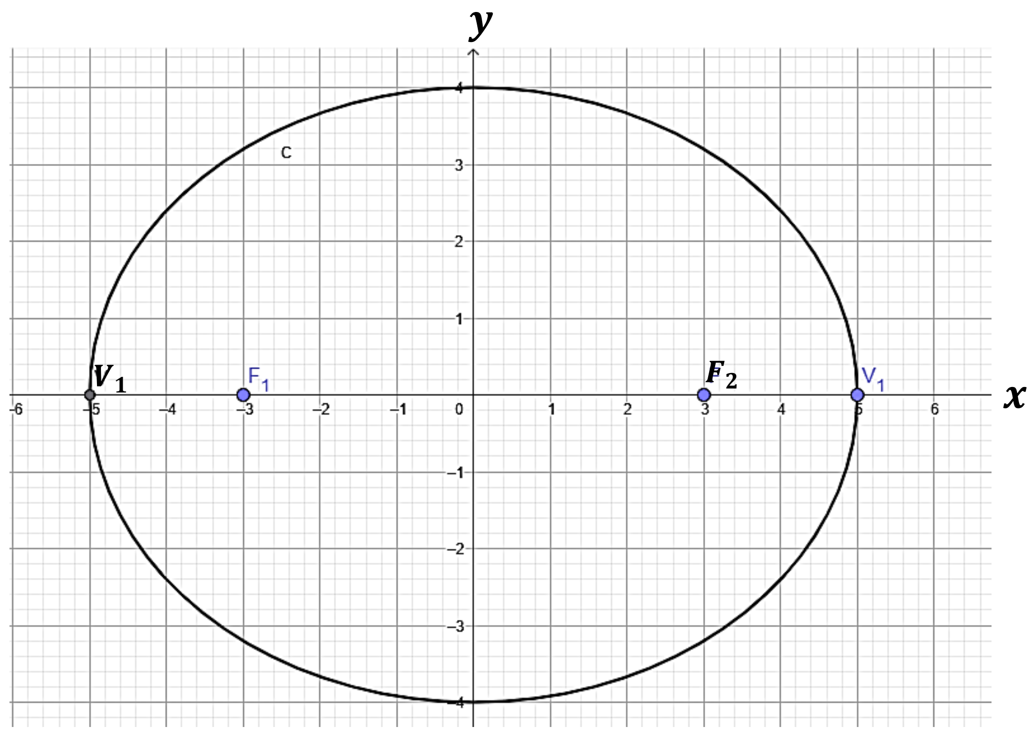
$$b = \sqrt{(5)^2 - (3)^2}$$

$$b = \sqrt{25 - 9}$$

$$b = \sqrt{16}$$

$$b = \sqrt{4^2}$$

$$b = 4$$



Por tanto, la ecuación de la elipse es $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1.$

Elipse con foco en el eje “y"

Para encontrar los elementos de una elipse cuyos focos se encuentran en el eje ***y***, se identifican ***a*** y ***b*** a partir de la ecuación $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$, con ***a*>*b*>** 0, calculándose después ***c*** mediante la fórmula $c^2 = a^2 - b^2$, De esta forma se obtienen:

focos: $\mathbf{F_1}$ (0, ***c***) y $\mathbf{F_2}$ (0, ***–c***), vértices: $\mathbf{V_1}$ (0, ***a***) y $\mathbf{V_2}$ (0, ***–a***), extremos: $\mathbf{E_1}$ (***b***, 0) y $\mathbf{E_2}$ (***-b***, 0).

Ejemplo

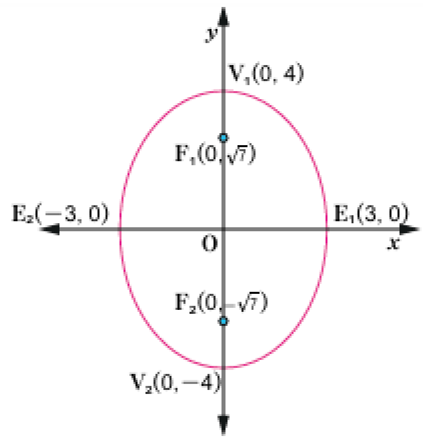
Determine la ecuación de la elipse con focos $\mathbf{F}_1$ $(0, \sqrt{7})$ y $\mathbf{F}_2$ $(0, -\sqrt{7})$ y vértices $\mathbf{V}_1$ $(0, 4)$ y $\mathbf{V}_2$ $(0, -4)$.

Como los focos y vértices están ubicados en el eje y, el eje mayor está sobre este eje.

De los focos se deduce que $c = \sqrt{7}$ y por los vértices que $a = 4$.

Se sustituye $a = 4$ y $c = \sqrt{7}$ en $c^2 = a^2 - b^2$

$$(\sqrt{7})^2 = 4^2 - b^2$$
$$7 = 16 - b^2$$
$$b^2 = 16 - 7$$
$$b^2 = 9$$
$$b = 3, \ (b > 0)$$



Por lo tanto, la ecuación es $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{16} = \mathbf{1}$.

Ejemplo

Dada la ecuación de la elipse $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{16} = 1$, encuentre su centro, focos, vértices y extremos.

La ecuación $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{16} = 1$ se escribe en la forma $\dfrac{x^2}{2^2} + \dfrac{y^2}{4^2} = 1$, y como $0 < 2 < 4$, entonces $a = 4$ y $b = 2$.

Se utiliza la expresión $c^2 = a^2 - b^2$, se tiene que

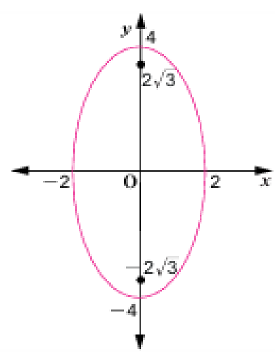
$$c^2 = 16 - 4 = 12$$

Por lo tanto $c = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$, $(c > 0)$, siendo los elementos de la elipse los siguientes:

Centro **(0, 0)**

Focos $\mathbf{F}_1$ $(0,\ \mathbf{2}\sqrt{\mathbf{3}})$ y $\mathbf{F}_2$ $(0,\ -\mathbf{2}\sqrt{\mathbf{3}})$

Vértices $\mathbf{V}_1$ **(0, 4)** y $\mathbf{V}_2$ **(0, −4)** y extremos $\mathbf{E}_1$ **(2, 0)** y $\mathbf{E}_2$ **(−2, 0)**.



Dada la ecuación de la elipse $25x^2 + 9y^2 = 225$, obtenga sus vértices, focos y extremos.

La ecuación dada se transforma en la forma $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ dividiendo ambos lados por 225

$$\frac{25x^2}{225} + \frac{9y^2}{225} = \frac{225}{225}, \text{ es decir } \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1,$$

de donde se obtiene $\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{5^2} = 1$. Luego, $a = 5$ y $b = 3$

Utilizando la expresión $c^2 = a^2 - b^2$, se tiene que

$$c^2 = 25 - 9 = 16$$

Por lo tanto $c = \sqrt{16} = 4$, $(c > 0)$.

En conclusión, su centro es **(0, 0)**, los focos $\mathbf{F_1}$ **(0, 4)** y $\mathbf{F_2}$ **(0, −4)**, vértices $\mathbf{V_1}$ **(0, 5)** y $\mathbf{V_2}$ **(0, −5)** y extremos $\mathbf{E_1}$ **(3, 0)** y $\mathbf{E_2}$ **(−3, 0)**.

Ejemplo

Practica lo Aprendido

1. Determine en cada inciso la ecuación de la elipse con los datos dados.

   a) Focos F_1 (5, 0) y F_2 (−5, 0), vértices V_1 (8, 0) y V_2 (−8, 0).

2. Deduce la ecuación de la elipse con los datos dados.

   a) Focos F_1 (0, 3) y F_2 (0, −3), vértices V_1 (0, 4) y V_2 (0, −4).

3. Encuentre vértice, focos y extremos de las elipses dadas por las siguientes ecuaciones.

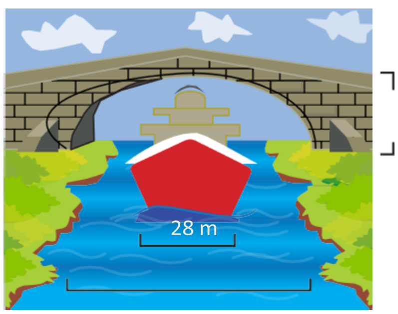
   a) $3x^2 + 27y^2 = 27$ b) $x^2 + 9y^2 = 36$

II-Resuelve las siguientes situaciones problemáticas de forma individual o en equipo:

1. Un paso a desnivel construido en forma semielíptica tiene 12 metros de largo y una altura máxima de 3 metros a partir del centro. Determina la altura

máxima que debe tener un camión para pasar por debajo del paso a desnivel, si la anchura de este camión es de 3 metros del centro de la calle hacia cada lado.

2. Una arquitecta y un ingeniero trabajan en el diseño de un puente con forma semielíptica para un río de 30 metros de ancho. El puente debe ser tal que un barco de a lo sumo 20 metros de ancho y 3 metros de alto pueda cruzar debajo de este con total seguridad. Determina la altura que debe tener el puente.



14 m

Guía de autoestudio

A continuación, se proponen las siguientes actividades para que realice su autoestudio.

1) Determine en cada inciso la ecuación de la elipse con los datos dados.

   Focos $F_1\ (2, 0)$ y $F_2\ (-2, 0)$, vértices $V_1\ (9, 0)$ y $V_2\ (-9, 0)$.

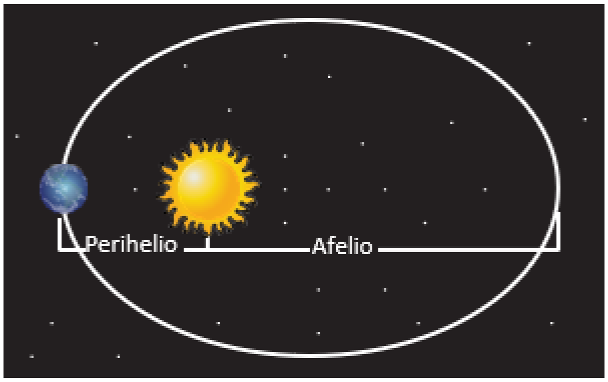
2) Deduce la ecuación de la elipse con los datos dados.

   a. Focos $F_1\ (0, 1)$ y $F_2\ (0, -1)$, vértices $V_1\ (0, 3)$ y $V_2\ (0, -3)$.

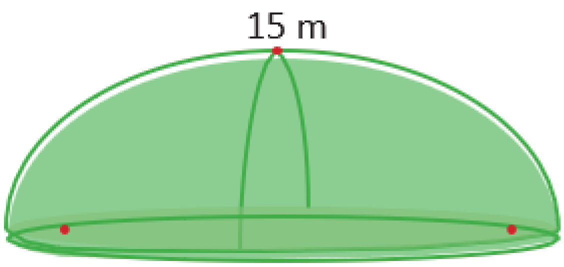
3) Encuentre vértice, focos y extremos de las elipses dadas por las siguientes ecuaciones.

a) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{36}=1$ b) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{49}=1$ b) $9x^2+4y^2=36$

4) La Tierra cumple con recorrer una órbita elíptica en exactamente un año, dicha elipse tiene como uno de sus focos el Sol. El instante en el que la Tierra se ubica más cerca del Sol se conoce como perihelio y son aproximadamente 147 millones de kilómetros de distancia; mientras que el instante en el que está más alejada del Sol se conoce como afelio y se ubica a una distancia aproximada de 153 millones de kilómetros. Determina la ecuación de la órbita de la Tierra.



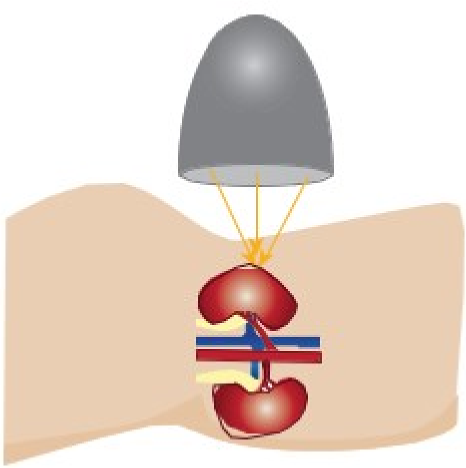
5) Una estructura arquitectónica fue diseñada para poder enviar secretos a otra persona sin que los demás los escuchen. La forma de su diseño es semielíptico (aprovechando las propiedades focales de la elipse), la altura de dicha estructura en el punto más alto es de 15 metros y la distancia entre los vértices



Si dos personas están sobre los focos de la elipse, las ondas de sonido que salgan de un foco serán reflejadas directamente hacia el otro foco.

del salón es de 34 metros. Determina la ubicación que deben tener dos personas para que uno pueda escuchar al otro, aunque se hablen por susurros.

6) Para curar los cálculos renales en una persona, en ocasiones se utiliza un procedimiento conocido como litotripcia. Este procedimiento utiliza una cubierta semielíptica, y se fundamenta en la propiedad de los focos de una elipse: se localiza un aparato generador de ondas de choque en el foco de la elipse y estas tendrán efecto sobre el otro foco, lugar donde se encuentra el cálculo renal. Si el aparato tiene 13 cm de altura y 10 cm de diámetro, determina a qué distancia podría estar el cálculo para poder pulverizarlo utilizando este aparato.



Encuentro 8:

Hipérbola

- Definición y elementos
- Ecuación de la hipérbola con focos en el eje "x"
- Ecuación de la hipérbola con foco en el eje "y"

Descripción

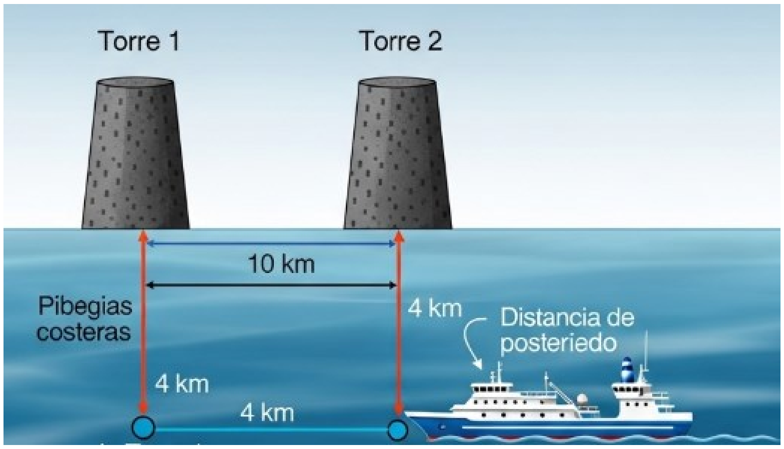
Estimado estudiante, en este encuentro estudiaremos las formas de expresar una hipérbola y sus elementos, en la solución de situaciones en diferentes contextos

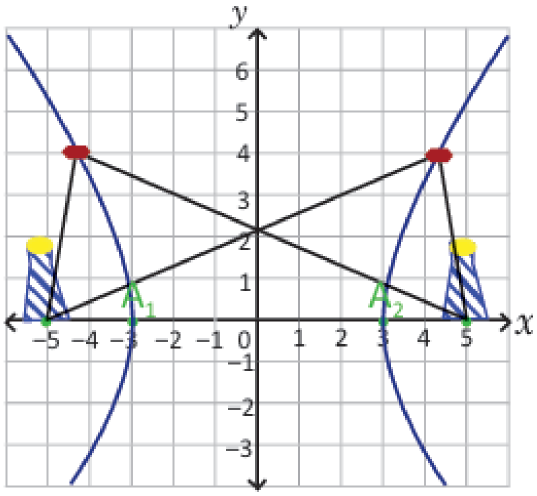
A continuación, te presentamos la siguiente información referida al contenido en estudio para que la leas y analices cada uno de los ejemplos desarrollados.

Analicemos la siguiente situación

1. Un barco envía señales hacia dos torres ubicadas sobre las costas a 10 km una de la otra, si al recibir la señal se calcula que la ubicación del barco a una de las torres es 6 km más lejana que la distancia a la otra torre, Determine la posible posición del barco si este navega a 4km de distancia de la costa.

Solución:





Utilizando la **nota informativa** de la clase anterior se tiene que la ecuación de la hipérbola es:

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, luego del problema y del bosquejo realizado se tiene que los focos de la hipérbola son las torres, la distancia entre las dos torres que representan los focos es de $2c = 10$, de donde $c = \frac{10}{2} = 5$, ahora la distancia de uno de sus ejes transversos es $2a = 6$, de aquí $a = \frac{6}{2} = 3$, con estos datos podemos calcular c, realizando un despeje y luego sustituyendo los valores encontrados en:

$c^2 = a^2 + b^2$

$c^2 - a^2 = b^2$

$\sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{b^2}$

$\sqrt{c^2 - a^2} = b$

$\sqrt{(5)^2 - (3)^2} = b$

$\sqrt{25 - 9} = b$

$\sqrt{16} = b$

$4 = b$

La ecuación de la hipérbola es: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, luego:

$$\frac{x^2}{3^2} - \frac{y^2}{4^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$$

Si se alinea la costa con el eje "x" a como se muestra en el bosquejo, luego la distancia del barco a la costa seria su coordenada "$y = 4$", **ver bosquejo,** sustituyendo:

$$\frac{x^2}{3^2} - \frac{4^2}{4^2} = 1$$
$$\frac{x^2}{3^2} - 1 = 1$$
$$\frac{x^2}{3^2} = 1 + 1$$

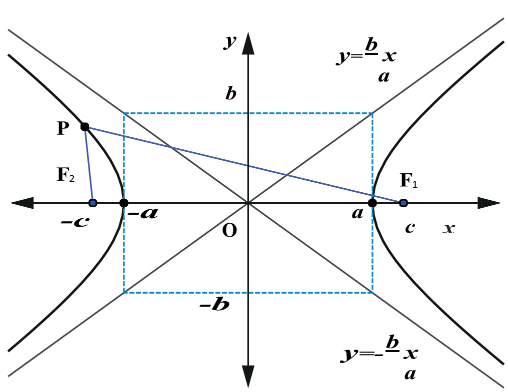
$$\frac{x^2}{3^2} = 2$$
$$x^2 = 2 * 3^2$$
$$\sqrt{x^2} = \pm\sqrt{2 * 3^2}$$
$$x = \pm 3\sqrt{2}$$

La posición posible del barco es: $\left(3\sqrt{2}, 4\right)$ y $(-3\sqrt{2}, 4$

Definición y elementos de la hipérbola

La hipérbola es el lugar geométrico de los puntos del plano talque la diferencia de sus distancias a dos puntos fijos, llamados focos, es constante.
Los elementos de la hipérbola son los siguientes:
Los focos, los vértices, eje transverso, las asíntotas, el lado recto.

La longitud del eje transverso es: $2a$ su lado recto es: $LR = \frac{2b^2}{a}$, la hipérbola tiene dos focos y dos vértices, su eje transverso es la longitud que une sus dos vértices es $2a$, el eje conjugado es perpendicualar al eje transverso y mide $2b$, la distancia del eje focal es $2c$.



Hipérbola con focos en el eje "x"

Elementos de la Hipérbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ donde ***a*** > 0 y ***b*** > 0

1. Tiene dos focos **F**$_1$ (***c***, 0) y **F**$_2$ (-***c***, 0), donde ***c*** > 0; dos vértices **V**$_1$ (***a***, 0) y **V**$_2$ (-***a***, 0) y dos extremos **E**$_1$ (0, ***b***) y **E**$_2$ (0, -***b***). Los focos y vértices están sobre el eje ***x***.
2. La relación entre ***a***, ***b*** y ***c*** queda establecida con la expresión $c^2 = a^2 + b^2$
3. Tiene dos asíntotas, determinadas por las ecuaciones $y = \frac{b}{a}x, y = -\frac{b}{a}x$

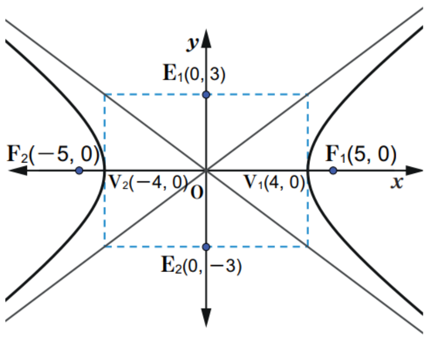
Ejemplo

Determine la ecuación de la hipérbola y sus asíntotas, si tiene por focos F_1 (5, 0) y F_2 (−5, 0) y vértices V_1 (4, 0) y V_2 (−4, 0).

Dado que los focos y vértices están en el eje x, la ecuación de la hipérbola es de la forma $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. De los focos se deduce que $c = 5$ y por los vértices que $a = 4$.

Se sustituye $a = 4$ y $c = 5$ en $c^2 = a^2 + b^2$

$$5^2 = 4^2 + b^2$$
$$25 = 16 + b^2$$
$$b^2 = 25 - 16 = 9$$
$$b = 3, \quad (b > 0)$$



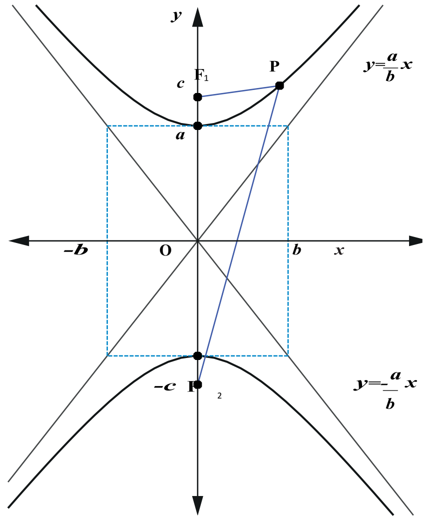
Por lo tanto, la ecuación de la hipérbola es $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$

Las asíntotas son: $y = \frac{3}{4}x$ y $y = -\frac{3}{4}x$

Hipérbola con focos en el eje "y"

Elementos de la hipérbola $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$, donde ***a*** > 0 y ***b*** > 0

1. Tiene dos focos **F**$_1$ (0, ***c***) y **F**$_2$ (0, -***c***), donde ***c*** > 0; dos vértices **V**$_1$ (0, ***a***) y **V**$_2$ (0, -***a***) y dos extremos **E**$_1$ (***b***, 0) y **E**$_2$ (-***b***, 0). Los focos y vértices están en el eje ***y***.
2. La relación entre ***a***, ***b*** y ***c*** queda establecida con la expresión $c^2 = a^2 + b^2$.
3. Tiene dos asíntotas, determinadas por las ecuaciones $y = \frac{a}{b}x, y = -\frac{a}{b}x$



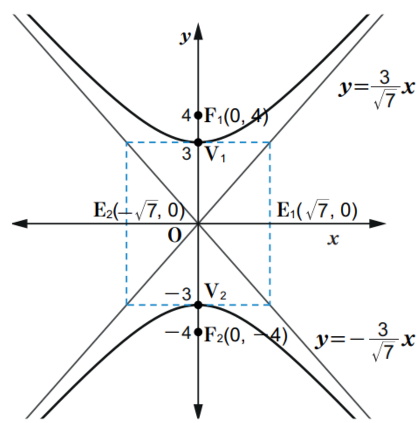
Ejemplo

Determine la ecuación de la hipérbola y sus asíntotas, si tiene por focos F_1 (0, 4) y F_2 (0, −4) y vértices V_1 (0, 3) y V_2 (0, −3).

Dado que los focos y vértices están en el eje y, la ecuación de la hipérbola es de la forma $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$. De los focos se deduce que $c=4$ y por los vértices que $a=3$.

Sustituyendo $a=3$ y $c=4$ en $c^2=a^2+b^2$

$$4^2=3^2+b^2$$
$$16=9+b^2$$
$$b^2=16-9=7$$
$$b=\sqrt{7},\quad (b>0)$$



Por lo tanto, la ecuación de la hipérbola es $\frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{7}=1$

Las asíntotas son: $y=\frac{3}{\sqrt{7}}x$ y $y=-\frac{3}{\sqrt{7}}x$

Practica lo Aprendido

Actividades de autoevaluación

1. Determine para cada inciso la ecuación de la hipérbola y sus asíntotas si tiene:

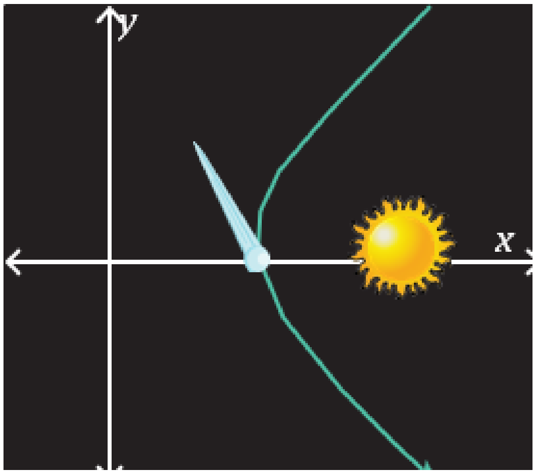
   a) Focos F_1 (10, 0) y F_2 (−10, 0), vértices V_1 (6, 0) y V_2 (−6, 0).

2. Encuentre en cada inciso la ecuación de la hipérbola y sus asíntotas si tiene:

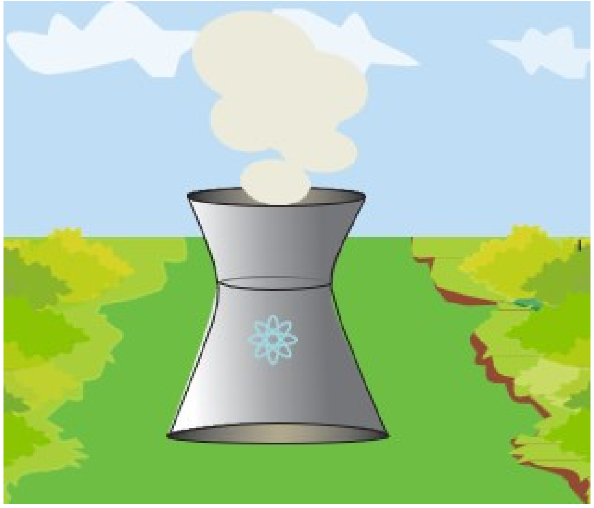
a) Focos $F_1\ (0, 5)$ y $F_2\ (0, -5)$ y vértices $V_1\ (0, 3)$ y $V_2\ (0, -3)$.

Resuelve las siguientes situaciones problemáticas de forma individual o en equipo

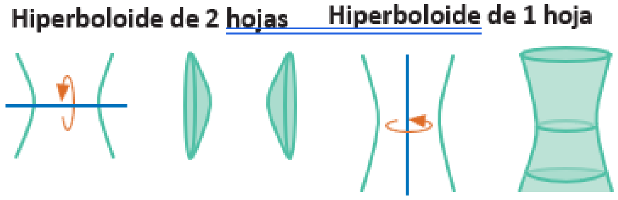
1. En el universo las trayectorias de un cometa pueden tener diversas formas, como elípticas, parabólicas o hiperbólicas, siempre teniendo al Sol como foco de dichas figuras. Tomando un cometa cuya trayectoria es hiperbólica (solo será visto una vez en la historia), cuya ecuación está dada por $\frac{x^2}{20^2} - \frac{y^2}{21^2} = 1$, Donde los números 20 y 21 representan cuatrillones de metros. Determina la distancia mínima en que pasará el cometa con dicha trayectoria del sol.



2. Las torres de enfriamiento de las plantas nucleares de energía se diseñan con forma de hiperboloide de una hoja, si el diámetro de la parte más alta es 3.75 m y se ubica a 9 m de altura, y el diámetro más pequeño es de 3 m y se ubica a 6 m de altura, determina aproximadamente el diámetro de la base de la torre.



Una forma de hiperboloide es un cuerpo geométrico que resulta de girar una hipérbola alrededor de alguno de sus ejes. Si se gira alrededor del **eje transverso** se conoce como **hiperboloide de 2 hojas** y si se gira alrededor del **eje conjugado** se conoce como **hiperboloide de 1 hoja**.



Guía de autoestudio

A continuación, se proponen las siguientes actividades para que realice su autoestudio.

3. Determine para cada inciso la ecuación de la hipérbola y sus asíntotas si tiene:

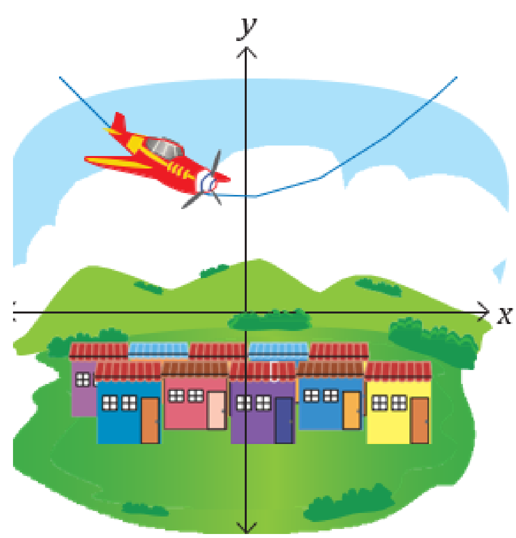
   Focos $F_1(\sqrt{5}, 0)$ y $F_2(-\sqrt{5}, 0)$, vértices $V_1(1, 0)$ y $V_2(-1, 0)$.

4. Encuentre en cada inciso la ecuación de la hipérbola y sus asíntotas si tiene:

   Focos son $F_1(0, \sqrt{8})$ y $F_2(0, -\sqrt{8})$ y vértices $V_1(0, 2)$ y $V_2(0, -2)$.

II- Resuelve las siguientes situaciones problemáticas de forma individual o en equipo

1. La torre de Polibino fue la primera estructura diseñada con forma de hiperboloide. Si el diámetro de la parte más alta de una torre hiperboloide es 4 5 m y se ubica a 32 m de altura, y el diámetro más pequeño es de 4 m y se ubica a 16 m de altura, determina el diámetro de la base de la torre.



2. Una avioneta vuela sobre la ciudad de San Vicente y describe una trayectoria hiperbólica dada por la ecuación 4y2 – x2 = 2 500.Determina cuál es la menor distancia sobre el nivel del suelo a la que estará dicha avioneta.

Encuentro 9:

Técnica de Conteo

- Diagrama de Árbol
- Principio de conteo de la Suma
- Principio de conteo para la Multiplicación

Descripción

Estimado estudiante, en este encuentro estudiaremos las técnicas de conteo en la solución de situaciones en diferentes contextos.

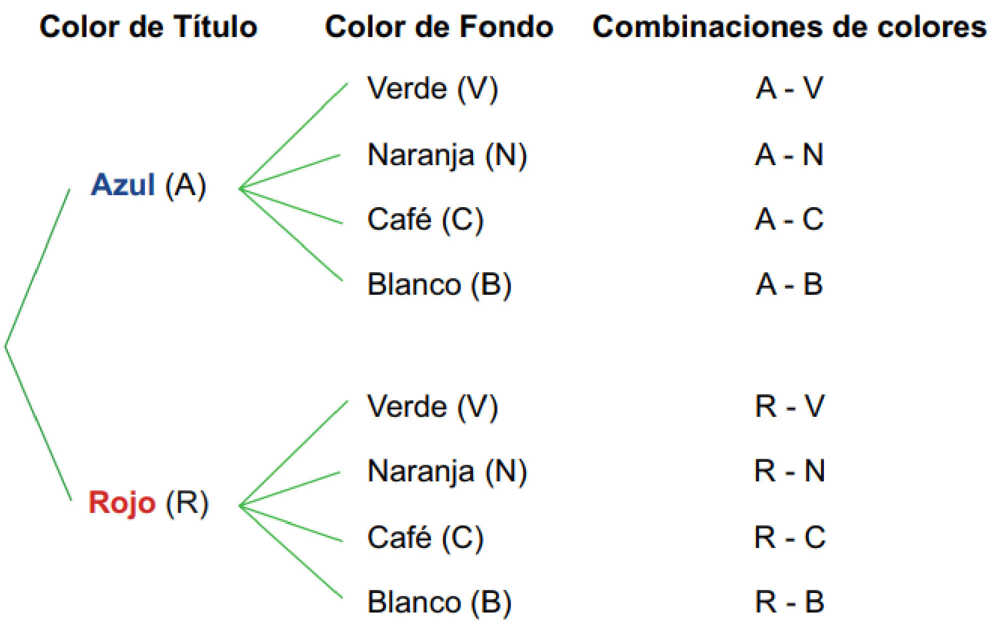
A continuación, te presentamos la siguiente información referida al contenido en estudio para que la leas y analices cada uno de los ejemplos desarrollados.

Analicemos la siguiente situación

Elías quiere diseñar la carátula de un libro cuyo título puede ser de color azul o rojo y el fondo verde, naranja, café o blanco. ¿Cuántas combinaciones de colores posibles hay para la carátula?

Solución:

Una posible combinación para la carátula es el título en azul y fondo verde. Todas las posibles combinaciones se muestran en el siguiente diagrama:



En conclusión, se pueden realizar 8 combinaciones de colores para diseñar la carátula del libro.

Las técnicas de conteo son herramientas matemáticas utilizadas en probabilidad y estadística para determinar el número total de resultados posibles en una situación, especialmente cuando se trata de combinaciones o arreglos de objetos. Se utilizan cuando es difícil o laborioso enumerar todos los resultados posibles de forma manual.

Diagrama de árbol

Un diagrama de árbol es un recurso gráfico donde se muestran todas las posibles combinaciones de una acción programada, las cuales pueden llevarse a cabo en un número finito de formas. Se coloca una "rama" por cada posibilidad

Ejemplo

Se requiere la formación de un solo número de tres cifras con los dígitos 1, 2, 3, sin repetición de alguno de estos, para abrir una cerradura de combinación instalada en una puerta. Encuentre el total de números de tres cifras que se deben formar si no se conoce la combinación correcta.

Solución:

Si la primera cifra del número fuese 1, la segunda cifra sería 2 o 3. Si escogemos el 2, la tercera cifra es 3 obteniendo el arreglo 123. Pero si la segunda cifra fuese el número 3, la tercera cifra tendría que ser 2, es decir, formando el número 132.

En el siguiente diagrama de árbol se muestran las 6 cifras posibles dentro de las cuales se encuentra la combinación correcta para abrir la cerradura.

1ra cifra	2da cifra	3ra cifra	Combinaciones
1	2	3	123
	3	2	132
2	1	3	213
	3	1	231
3	1	2	312
	2	1	321

En conclusión, el total de arreglos posibles es **6**.

Principio de conteo de la Suma

Si la acción **A** se puede realizar de ***m*** formas distintas y la acción **B** se puede realizar de ***n*** maneras distintas, y si las formas en las que puede ocurrir **A** son distintas de las de **B**, entonces se puede realizar la acción **A** o **B de** $m + n$ formas distintas.

Ejemplo

Un cierto tipo de repuesto de automóvil se vende en 6 tiendas de Masaya y en 8 tiendas de Granada. Diga en cuantas tiendas se puede comprar el repuesto.

Solución:

Se define la situación **A**: obtener el repuesto en Masaya, la cual puede ocurrir de 6 maneras, y **B**: obtener el repuesto en Granada, que puede darse de 8 formas, entonces el número total de tiendas en las que se puede obtener el repuesto es:

$$6 + 8 = 14$$

Ejemplo

En una zapatería tienen 4 tipos de sandalias, 2 tipos de zapatillas y 3 tipos de botas, ¿cuántos tipos de zapatos diferentes ofrece la zapatería?

Solución:

La zapatería ofrece 3 tipos de zapatos: sandalias, de las cuales hay 4 tipos diferentes; zapatillas, de las cuales hay 2 tipos diferentes; y botas, de las cuales hay 3 tipos de botas diferentes.

Así se cumple que la zapatería ofrece $4 + 2 + 3 = 9$ tipos de zapatos diferentes.

Principio de conteo de la Multiplicación

Si un suceso o evento **A** puede ocurrir de ***m*** maneras, y luego otro suceso **B** puede ocurrir de ***n*** maneras, entonces el total de formas en que ambos pueden ocurrir es $\boldsymbol{mn}$.

Si se tienen 3 o más sucesos, el número de formas en que estos pueden ocurrir simultáneamente es el producto de las formas de ocurrencia de cada uno.

Ejemplo

Una heladería ofrece cono de sorbete con un solo sabor entre fresa, vainilla y chocolate y un único baño que puede ser caramelo o maní. Si Luis quiere comprar un cono de sorbete, ¿de cuántas maneras puede combinar sabores y baños?

Solución:

Luis tiene 3 formas de elegir el sabor y 2 para escoger el baño del helado, de modo que cuenta con $(3)(2)=6$ formas de escoger sabores y baños.

Practica lo Aprendido

01. Resuelva la siguiente situación utilizando un diagrama de árbol:

a) Rubén tiene 2 pantalones, 2 camisetas y 2 gorras, de colores azul y negro en cada caso. ¿Cuántos trajes de un pantalón, una camiseta y una gorra puede formar?
b) Utiliza un diagrama de árbol para determinar de cuántas formas se pueden extraer sin reemplazo 3 boli- tas de color rojo, amarillo y verde (una de cada color) de una bolsa, si se extrae una bolita a la vez.
c) Utiliza un diagrama de árbol para calcular cuántas formas hay para repartir 4 dulces de diferente sabor entre 4 personas, si ninguna puede quedar sin dulces.

02. Utilice el principio de conteo de la suma para resolver los siguientes ejercicios:

a) Si se lanzan dos dados, determine el número de casos posibles en los que la suma de los números de las caras es 7 u 11.
b) Un grupo escolar formado por 12 niñas y 14 niños desean elegir su presidente. ¿De cuántas maneras pueden hacer la elección?

03. Utilice el principio de conteo de la multiplicación para resolver los siguientes problemas:

a) Un menú del día permite seleccionar un plato fuerte entre 5 y una bebida entre 3.
¿De cuántas formas distintas se puede solicitar una comida y bebida?

b) En una fábrica de zapatos de Masaya se elaboran 8 estilos de zapatos de mujer en 6 numeraciones distintas. ¿Qué cantidad debe comprar un comerciante para tener en su negocio de todos los estilos y tamaños?

c) Determine de cuántas maneras se puede formar una pareja de un niño y una niña de entre 4 niños y 3 niñas.

Guía de autoestudio

A continuación, se proponen las siguientes actividades para que realice su autoestudio.

1. Resuelva la siguiente situación utilizando un diagrama de árbol:
   a) María tiene 2 pantalones, 1 falda, 2 blusas y 3 pares de zapatos, todos diferentes. Utiliza diagrama de árbol para determinar cuántas formas diferentes tiene María para vestirse.
   b) Utiliza un diagrama de árbol para calcular el total de maneras que hay para extraer 2 cartas con reemplazo de entre 5 cartas diferentes.
2. Utilice el principio de conteo de la suma para resolver los siguientes ejercicios:
   a) Los grupos de décimo **A** y décimo **B** de un determinado Instituto constan de 43 y 38 alumnos respectivamente. ¿De cuántas maneras puede seleccionarse un estudiante de décimo **A** o de décimo **B**?
   b) En una zona de comedores hay 3 locales en donde se puede comprar, si el primero tiene 4 opciones de comida, el segundo 5 y el tercero 7, determina de cuántas formas se puede comprar comida en alguno de los locales.
   c) María tiene 4 centros escolares para realizar sus horas sociales, en el primer centro escolar tiene 2 opciones, en el segundo tiene 3 opciones, en el tercero tiene 4 opciones y en el cuarto solamente una opción para realizar las horas sociales. Determina cuántas opciones tiene en total María para realizar sus horas sociales.
3. Utilice el principio de conteo de la multiplicación para resolver los siguientes problemas:
   a) En un comedor hay 3 tipos de platos fuertes, 2 tipos de arroz y 3 tipos de ensalada. Determina de cuántas maneras se puede formar un almuerzo escogiendo entre un plato fuerte, un tipo de arroz y una ensalada.
   b) Determine de cuántas maneras se pueden repartir una pera y un mango entre 3 personas diferentes. Considera que no se pueden dar ambas frutas a una sola persona.

Encuentro 10:

Factorial de un número natural

- Permutaciones

Descripción

Estimado estudiante, en este encuentro estudiaremos factorial de un número natural y permutaciones, en la solución de situaciones en diferentes contextos.

A continuación, te presentamos la siguiente información referida al contenido en estudio para que la leas y analices cada uno de los ejemplos desarrollados.

Analicemos la siguiente situación

¿Cuáles y cuántos números de tres cifras puede formar utilizando los dígitos 1, 2 y 3?,¿importa el lugar que ocupa cada cifra en los arreglos encontrados? Recuerde la escritura de un número de tres cifras en centenas, decenas y unidades:

C	D	U

Solución:

Arreglos que inician con 1:	Arreglos que inician con 2:	Arreglos que inician con 3:
123, 132	213, 231	312, 321

Se tienen 6 números de tres cifras, lo cual se verifica aplicando el principio de la multiplicación: Se puede ubicar cualquiera de los 3 dígitos en la posición de las centenas, ocupada esta posición quedan 2 para las decenas, y luego de esto solamente 1 para las unidades:

Centenas		Decenas		Unidades	
3	#	2	≠	1	$= 6$

$3! = (3)(2)(1) = 6$

Factorial de un número natural

Para un número natural *n*, se define la factorial **de *n*** como el producto de los números consecutivos desde

1 hasta *n*. ¡Se denota la factorial de n por n!, y se lee "*n* factorial". Entonces:

$$n! = n \times (n - 1) \times (n - 2) \times \cdots \times 3 \times 2$$

¡Observa que n! = *n* × (*n* – 1)!

En la solución del problema anterior el total de arreglos que se pueden hacer con ***n*** elementos distintos, en los que importa el orden, es ***n***!.

Ejemplo

a) En una clase de danza participan 5 bailarines. ¿De cuántas maneras pueden colocarse en fila?

Solución:

Se tiene que $5! = 5x4x3x2x1 = 120$

Complete las casillas con los factoriales restantes:

$1! = 1$	$2! = (2)(1) = 2$	$3! =$	$4! =$	$5! =$

Al calcular 3! , 4! y 5! se obtiene

$3! = (3)(2)(1) = 6$ $\quad 4! = (4)(3)(2)(1) = 24$ $\quad 5! = (5)(4)(3)(2)(1) = 120$

De modo que la tabla completa es

$1! = 1$	$2! = (2)(1) = 2$	$3! = \mathbf{6}$	$4! = \mathbf{24}$	$5! = \mathbf{120}$

Permutaciones

Una secuencia ordenada de objetos donde el orden importa se conoce como **permutación**.

El total de permutaciones que se pueden realizar tomando *r* de *n* $(0 \leq r \leq n)$ está dado por:

$$n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times (n-(r-1)) = \frac{n!}{(n-r)!} \quad \text{Observa que } nPo = \frac{n!}{(n-0)!} = 1$$

Este total se denota por *n*P*r*, y se lee "*n* permuto *r*", es decir:

$$nPr = \underbrace{n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times (n-(r-1))}_{r \text{ factores}}$$

$$\boldsymbol{nPr} = \frac{\boldsymbol{n}!}{(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{r})!}$$

Cuando $n = r$, $\boldsymbol{nPr} = \boldsymbol{n}!$

Ejemplo

¿Cuántos números de 3 cifras se pueden formar con los dígitos del 1 al 9, si no se repite ningún dígito?

Solución:

Al tomar 3 cifras, es importante el orden entre ellas (forman números diferentes), entonces considerando la permutación tomando 3 de 9 objetos, 9P3 = 9 × 8 × 7 = 504. Por lo tanto, se pueden formar 504 números.

$$9P3 = \underbrace{9 \times 8 \times 7}_{\text{3 factores}}$$

Practica lo Aprendido

01. Determine el factorial según sea la situación dada, observa si es importante el orden o no

a) Calcule $6!, 8!\ y\ 5!$

b) ¿Cuántos y cuáles arreglos pueden obtenerse con las letras de la palabra "paz"?

c) En una clase de danza participan 5 bailarines. ¿De cuántas maneras pueden colocarse en fila?

02. Encuentre las permutaciones de las siguientes situaciones problemáticas, observa si es importante el orden o no.

a) Calcule, ${}_6P_2, {}_5P_4, {}_8P_5$

b) ¿Cuántos arreglos de 3 letras se pueden formar con las letras **S**, **A**, **M**, **K**, si no se permite la repetición de estas?

c) ¿De cuántas formas se puede confeccionar una bandera de 4 franjas de distintos colores si se tiene telas de 5 colores distintos?

Guía de autoestudio

A continuación, se proponen las siguientes actividades para que realice su autoestudio.

1. Determine el factorial según sea la situación dada, observa si es importante el orden o no

a) ¿De cuántas formas se puede confeccionar una bandera de 4 franjas de distinto color cada una?

b) El dueño de una librería desea exponer en un escaparate 6 banderines correspondientes a 6 países. ¿De cuántas maneras puede hacerlo si los quiere colocar en fila?

2. Encuentre las permutaciones de las siguientes situaciones problemáticas, observa si es importante el orden o no.

a) ¿Cuántos números de 2 cifras sin repetir se pueden formar con los dígitos del 1 al 5?

b) ¿De cuántas maneras se pueden repartir 3 caramelos de diferente sabor para 6 estudiantes, consideran- do que ningún estudiante recibe más de un caramelo?

c) Calcula la cantidad de maneras en que se puede elegir un presidente, un vicepresidente y un tesorero de un grupo de 6 personas.

Encuentro 11:

Combinaciones

- Permutaciones con repetición

Descripción

Estimado estudiante, en este encuentro estudiaremos las combinaciones y permutaciones con repetición en la solución de situaciones en diferentes contextos.

A continuación, te presentamos la siguiente información referida al contenido en estudio para que la leas y analices cada uno de los ejemplos desarrollados.

Iniciemos analizando la siguiente situación

Se tienen 4 fichas de colores: Azul , Rojo , Verde y Café . ¿Cuántos arreglos diferentes se pueden realizar tomando tres de estas fichas?

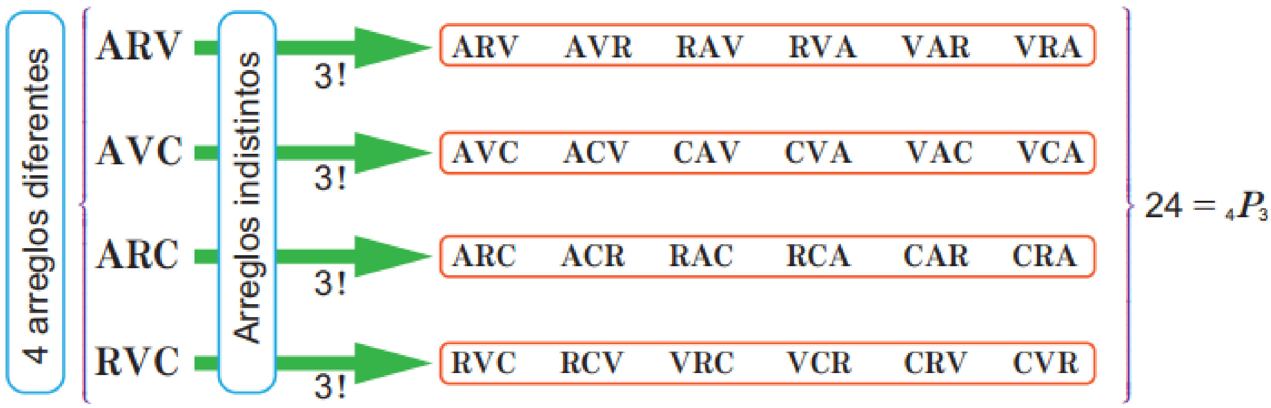
Solución:

Se observa que el orden en los arreglos a efectuar no es importante, ya que, por ejemplo, no hay diferencia en los arreglos

Azul-Rojo-Verde y Azul-Verde-Rojo

Tomando 3 de los colores dados, se tienen $3! = 6$ arreglos indistintos. Utilizando la notación Azul: **A**, Rojo: **R**, Verde: **V** y Café: **C**, se tiene que los arreglos diferentes son solamente 4:

ARV, AVC, ARC, RVC. Cada uno de estos tiene asociados 6 arreglos indistintos:



Por lo anterior:

$$(4)(3!) = 24 = {}_4P_3 .$$

Es decir,

$$\frac{{}_4P_3}{3!} = 4 .$$

Combinaciones

Una combinación es un arreglo, en el que no importa el orden, de ***r*** objetos seleccionados sin repetir de entre ***n*** objetos distintos.

El número de combinaciones de ***n*** objetos distintos, tomando ***r*** a la vez, denotado por ***n Cr*** , está dado por la fórmula:

$$ {}_nC_r = \frac{{}_nP_r}{r!} $$

Una combinación a menudo está relacionada con la forma de escoger un grupo de objetos, porque en este sentido no importa el orden, sino el conjunto final de objetos que se elija.

Ejemplo

¿Cuántos comités distintos, integrados por 3 personas, se pueden formar a partir de un grupo de 6 personas?

Solución:

El orden de selección para formar un comité no es relevante. Luego, se debe calcular el número de combinaciones de 6 objetos, tomando 3 a la vez:

$$_{6}C_{3}=\frac{_{6}P_{3}}{3!}=\frac{(6)(5)(4)}{(3)(2)(1)}=\frac{120}{6}=20.$$

Por tanto, se pueden formar **20 comités distintos** a partir de un grupo de 6 personas.

Permutaciones con Repetición

El número de permutaciones diferentes de n objetos de los cuales un objeto aparece n_1 veces, otro objeto aparece $n_2$veces y así sucesivamente es:

$$\frac{n!}{n_1!\cdot n_2!\cdots n_k!}$$

siendo $n=n_1+n_2+\cdots+n_k$.

Ejemplo

¿Cuántas secuencias de 8 letras se pueden formar con las letras ***x***, ***x***, ***x***, ***y***, ***y***, ***y***, ***c***, ***c***?

Solución:

La cantidad de letras a considerar es 8, de las cuales, 3 son de un tipo, 3 de otro y 2 de un tercer tipo, de modo que el total de secuencias que se pueden formar es:

$$\frac{8!}{3!3!2!}=\frac{(8)(7)(6)(5)(4)(\cancel{3})(\cancel{2})(\cancel{1})}{(\cancel{3})(2)(1)(3)(2)(1)(\cancel{2})(\cancel{1})}=\frac{6\,720}{12}=\mathbf{560}.$$

Practica lo Aprendido

01. Calcule el total de combinaciones en cada caso:
   a) $_{5}C_{3}$, $_{6}C_{4}$, $_{7}C_{5}$
   b) Se han seleccionado 7 personas para distribuirles 4 premios. ¿De cuántas maneras puede realizarse esta asignación, si cada persona puede recibir un solo premio?
   c) Una señora tiene 10 vestidos y en su viaje de vacaciones quiere llevar consigo 6 de ellos. ¿De cuántas maneras puede seleccionarlos?

02.Resuelva los siguientes problemas:

a) ¿Cuántos números de 5 cifras se pueden formar en los cuales el 2 se repita 2 veces y el 3 aparezca 3 veces?
b) ¿De cuántas maneras se pueden alinear en un estante 2 libros de Matemáticas, 2 de Física y 3 de Historia si los libros de cada materia son iguales?
c) ¿Cuántas permutaciones diferentes se pueden formar utilizando las 8 letras de la palabra PARALELA?
d) Determina cuántas formas hay para colocar 3 letras en una fila utilizando a, b, c y d; considera que las letras se pueden repetir.

Guía de autoestudio

A continuación, se proponen las siguientes actividades para que realice su autoestudio.

1. Calcule el total de combinaciones en cada caso:
   a) En una estantería hay 6 libros diferentes de matemáticas y 3 de física, también diferentes. Si queremos seleccionar 2 de cada área, ¿de cuántas maneras se puede hacer?
   b) En una fiesta escolar hay 8 niñas y 10 niños. ¿De cuántas maneras se pueden escoger de entre ellos 4 parejas de niños y niñas para un baile?

2. Resuelva los siguientes problemas:

a) El código binario es una forma de representación numérica alternativa al sistema decimal, y es muy utilizado en el ambiente computacional porque solo utiliza dos dígitos o caracteres, el 0 y el 1 que se conocen como bits y resultan fáciles de almacenar en una computadora. Determina cuántos números de 7 cifras se pueden representar en código binario.

b) Determina cuántos subconjuntos de $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ se pueden formar.

c) El número de la placa de un vehículo está conformada por 2 letras, que ocupan las primeras 2 posiciones, y 4 números. Si en una placa se pueden repetir tanto letras como números, y se pueden usar las letras A, B, C, D, E y los números del 1 al 9, determina cuántas placas se pueden elaborar con estas condiciones.

Encuentro 12:

Probabilidad

- Probabilidad Teórica
- Definición y Aplicaciones

Descripción

Estimado estudiante, en este encuentro estudiaremos la probabilidad y sus propiedades, en la solución de situaciones de la vida cotidiana.

A continuación, te presentamos la siguiente información referida al contenido en estudio para que la leas y analices cada uno de los ejemplos desarrollados.

Analicemos la siguiente situación

Calcula la probabilidad de que al lanzar un dado caiga un número par (la cantidad de puntos sea par). Considerando el espacio muestral S = {1, 2, 3, 4, 5, 6}.

Solución:

Denotando el evento A = "Cae un número par", este evento se puede expresar como A = {2, 4, 6}.

Por lo tanto, P(A) $= \frac{n(A)}{n(B)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

Definición de probabilidad teórica

Espacio muestral y evento

Un proceso que genera un conjunto de datos (o resultados, como el hecho de lanzar una moneda) se conoce como **experimento**. El conjunto de los posibles resultados que se pueden obtener al realizar un experimento se conoce como **espacio**

muestral. Un elemento del espacio muestral se conoce como **evento simple** y cualquier subconjunto del espacio muestral se conoce como **evento**.

Si en un experimento se cumple que cada evento simple (cada posible resultado) tiene la misma posibilidad de ocurrir, entonces el valor obtenido dividiendo el total de elementos que tiene un evento A (casos favorables), es decir, *n*(A), entre el total de elementos del espacio muestral E (casos posibles), es decir, *n*(E), se conoce como **probabilidad teórica**, además:

$$\boldsymbol{P(A)} = \frac{\boldsymbol{n(A)}}{\boldsymbol{n(B)}} = \frac{Número\ de\ resultasdos\ favorables}{Número\ de\ resultados\ posibles}$$

Ejemplo

Una urna contiene 5 canicas blancas, 10 canicas verdes y 8 amarillas. Si se extrae una canica, calcule la probabilidad de que sea verde.

Solución:

El espacio muestral lo constituyen todas las canicas, de modo que este posee 5+10+8=23 elementos, es decir:

$$n(E)=23$$

Se define el evento **A**: extraer una canica verde. Este consta de 10 casos favorables,

de modo que: $n(A)=10$

Por tanto, $P(A) = \frac{n(A)}{n(E)} = \frac{10}{23}$, es decir la probabilidad de extraer una canica verde es $\frac{10}{23}$.

Aplicaciones del concepto de probabilidad teórica

Ejemplo

Calcule la probabilidad de que la suma de los números que aparecen en las caras superiores de dos dados que se lanzan sea 7.

Solución:

Los 36 pares del espacio muestral E de este experimento se muestran en la tabla, es decir, $n(E) = 36$

	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
2	(2,1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
3	(3,1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
4	(4,1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
5	(5,1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
6	(6,1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

Suman 7

El evento definido como

A: la suma de los resultados es 7

consta de los 6 pares:

(6,1), (5, 2), (4, 3), (3, 4), (2, 5), (1, 6).

Así, $n(A) = 6$, luego

$$P(A)\frac{n(A)}{n(E)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

En conclusión, la probabilidad de obtener 7 como suma de los números de las caras en el lanzamiento de dos dados es: $\frac{1}{6}$.

Ejemplo

Calcule la probabilidad de obtener 2 escudos y un número en el lanzamiento de tres monedas (**N** representa número en la moneda y E escudo).

Solución:

El diagrama de la derecha revela los 8 posibles resultados del experimento, de modo que el espacio muestral es

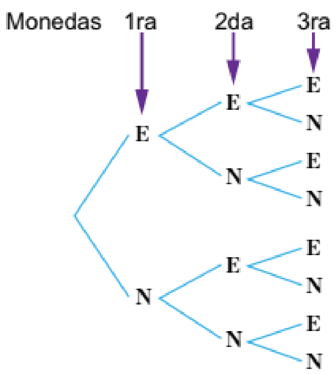
$$E = \{EEE, EEN, ENE, ENN, NEE, NEN, NNE, NNN\}.$$

Así, $n(E) = 8$.

El evento A: obtener 2 escudos y 1 número, consta de los resultados: EEN, ENE, NEE, de modo que $n(A) = 3$.
Luego,

$$P(A) = \frac{3}{8}.$$

Es decir, la probabilidad de obtener 2 escudos y 1 número es $\frac{3}{8}$.



Practica lo aprendido

1. Resuelva los siguientes problemas aplicando la definición de probabilidad.

a) En el lanzamiento de un dado, ¿qué es más probable obtener: un número par o un múltiplo de 3?

b) Una urna contiene 18 fichas marcadas cada una con un número de 1 a 18. Si se extrae una ficha, ¿cuál es la probabilidad de que esta muestre un múltiplo de 7?

c) Un recipiente consta de 9 pelotas de golf blancas, 8 verdes y 3 anaranjadas. Si se selecciona al azar una pelota del recipiente, ¿cuál es la probabilidad de que sea blanca? ¿y de que una de estas sea verde?

d) Si se lanzan dos dados, calcule la probabilidad de que:

- Las dos caras de los dados tengan el mismo número.
- La suma de los números de las caras sea 8.

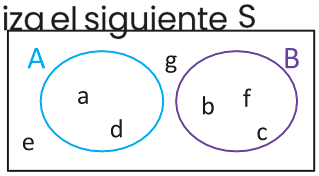
e) Se escoge una carta de una baraja de 52 cartas, ¿cuál es la probabilidad de seleccionar un as?

f) Determine la probabilidad de obtener un escudo y dos veces número en el lanzamiento de 3 monedas.

g) Determina la probabilidad de que al lanzar un dado dos veces caiga el número 3 en ambas ocasiones (la cantidad de puntos sea 3).

h) Determina la probabilidad de que al lanzar dos dados, la suma de todos los puntos (de ambos dados) sea 7.

i) Considerando el espacio muestral (S) como conjunto, analiza el siguiente diagrama de Venn, si cada evento simple tiene la misma probabilidad de ocurrir, resuelve:



a) Determina la probabilidad teórica de A.
b) Determina la probabilidad teórica de B.

j) Calcula la probabilidad teórica del evento de sacar una carta roja en una extracción de una baraja y compárala con la probabilidad experimental. Para la probabilidad experimental utiliza la clase anterior

Guía de autoestudio

A continuación, se proponen las siguientes actividades para que realice su autoestudio.

Realiza las siguientes actividades en casa y en tu cuaderno copia las situaciones siguientes, no olvides trabajar en equipo o de forma individual si lo deseas.

Si se lanza un dado, calcule la probabilidad para cada evento dado:

a) **A**: obtener un número par.
b) **B**: obtener un múltiplo de 3.
c) **A∩B**: obtener un número par y múltiplo de 3.
d) **AUB**: obtener un número par o un múltiplo de 3.

La intersección **A∩B** de **A** y **B** es el conjunto de los elementos comunes de **A** y **B.**

La unión **AUB** es el conjunto de los elementos comunes y no comunes de **A** y **B**.

Toma la nota informativa para poder resolver el problema.

Nota informativa:

Regla de la adición (Probabilidad de la unión de dos eventos)

Dados dos eventos **A** y **B** cualesquiera,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Encuentro 13:

Probabilidad de dos eventos

- Eventos mutuamente excluyentes
- Eventos independientes

Descripción

Estimado estudiante, en este encuentro estudiaremos la probabilidad de dos eventos, en la solución de situaciones de la vida cotidiana.

A continuación, te presentamos la siguiente información referida al contenido en estudio para que la leas y analices cada uno de los ejemplos desarrollados.

Si se lanza un dado, calcule la probabilidad para cada evento dado:

a) A: obtener un número par.
b) B: obtener un múltiplo de 3.
c) A∩B: obtener un número par y múltiplo de 3.
d) AUB: obtener un número par o un múltiplo de 3.

La intersección **A∩B** de **A** y **B** es el conjunto de los elementos comunes de **A** y **B.**

La unión **AUB** es el conjunto de los elementos comunes y no comunes de **A** y **B**.

Analicemos la siguiente situación

Solución:

El espacio muestral de este experimento es **E =** {1, 2, 3, 4, 5, 6}. De manera que ***n*(E)** **=** 6.

a) Los números pares en **E** son 2, 4, 6, de modo que **A** = {2, 4, 6} y por tanto

$n(A) = 3$. Entonces, la probabilidad de obtener un número par es:

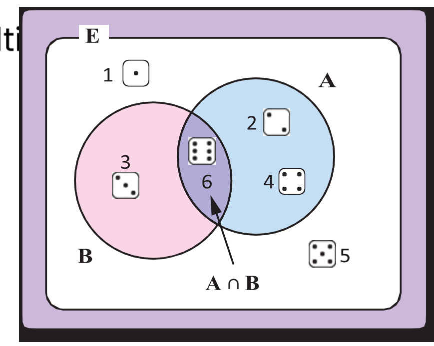
$$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

b) Para el evento **B**: obtener un múltiplo de 3, se tienen 2 casos favorables: 3 y 6, de modo que $B = \{3, 6\}$ y por lo tanto $n(B) = 2$. Luego,

$$P(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

c) Nótese que hay un resultado común en los eventos **A** y **B**, que corresponde al evento: “número par y múlti … $\{6\}$. Por lo cual:

$$P(A \cap B) = \frac{1}{6}$$



d) El diagrama de la derecha muestra que para el evento $\boldsymbol{AUB}$: “obtener un número par o un múltiplo de 3” se tiene 4 casos favorables: 2, 3, 4 y 6, de modo que: $\boldsymbol{n}(\boldsymbol{AUB}) = 4$

$$P(A \cup B) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Observe que $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}) + \boldsymbol{P}(\boldsymbol{B}) - \boldsymbol{P}(\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}} - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{6}} = \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{6}} = \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}} = \boldsymbol{P}(\boldsymbol{AUB})$

Es decir: $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{AUB}) = \boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}) + \boldsymbol{P}(\boldsymbol{B}) - \boldsymbol{P}(\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B})$

Probabilidad de la unión de dos eventos

Regla de la adición (Probabilidad de la unión de dos eventos)

Dados dos eventos **A** y **B** cualesquiera,

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}) = \boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}) + \boldsymbol{P}(\boldsymbol{B}) - \boldsymbol{P}(\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B})$$

Ejemplo

Si de una baraja de 52 cartas se extrae una al azar, ¿cuál es la probabilidad de que esta sea un as o diamante?

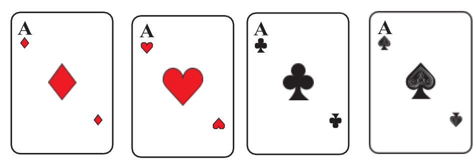
Solución:

El espacio muestral consta de 52 cartas, de las cuales 4 son ases, 13 de diamantes (entre estas hay una que es as de diamante), de modo que tenemos los siguientes eventos con sus respectivas probabilidades:

A: seleccionar un as: $P(A) = \frac{4}{52}$

B: seleccionar carta de diamante: $P(B) = \frac{13}{52}$

A∩B: seleccionar un as de diamante: $P(A \cap B) = \frac{1}{52}$



Diamantes	Corazones	Tréboles	Picas
K	K	K	K
Q	Q	Q	Q
J	J	J	J
10	10	10	10
9	9	9	9
8	8	8	8
7	7	7	7
6	6	6	6
5	5	5	5
4	4	4	4
3	3	3	3
2	2	2	2
As	As	As	As

De manera que para calcular la probabilidad del evento **AUB**: seleccionar un as o diamante, se tiene:

$$\boldsymbol{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$$

$$= \frac{4}{52} + \frac{13}{52} - \frac{1}{52} = \frac{16}{52} = \frac{4}{13}$$

En conclusión, la probabilidad de seleccionar un as o diamante $\frac{4}{13}$.

Eventos mutuamente excluyentes

Dos eventos **A** y **B** son mutuamente excluyentes si no tienen elementos en común, es decir $A \cap B = \phi$, en este caso la ocurrencia de uno excluye la ocurrencia del otro (no ocurren de forma simultánea).

Si dos eventos **A** y **B** son mutuamente excluyentes, entonces:

$$\boldsymbol{P(AUB) = P(A) + P(B)}$$

Ejemplo

Para el experimento de lanzar un dado calcule la probabilidad de cada evento:

a) **A**: obtener un número par.
b) **B**: obtener un múltiplo de 5.
c) **AUB**: obtener un número par o un múltiplo de 5.

Solución:

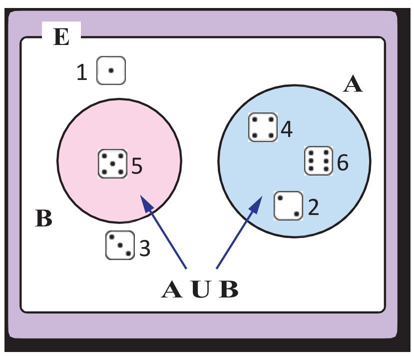
El espacio muestral de este experimento es **E** = {1, 2, 3, 4, 5, 6} siendo $n(E) = 6$

a) Para el evento **A**: obtener un número par, se tienen los casos favorables 2, 4, 6, de modo que $A = \{2, 4, 6\}$ y por tanto $n(A) = 3$. Así, $P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

b) Para el evento **B**: obtener un múltiplo de 5, se tiene solo un caso favorable 5, **B** = {5} de modo que $n(B) = 1$. Luego, $P(B) = \frac{1}{6}$

c) El diagrama de la derecha muestra que para el evento **AUB**: obtener un número par o un múltiplo de 5 (se han coloreado ambos eventos) se tienen 4 casos favorables: 2, 4, 5 y 6, de modo que $n(A \cup B) = 4$, por tanto, $P(A \cup B) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

Se observa que, $\boldsymbol{P(A) + P(B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}}$



Nótese que los eventos **A** y **B** no pueden ocurrir simultáneamente y que el número en la cara del dado no puede ser par y múltiplo de 5 a la vez, esto es, $A \cap B = \emptyset$, siendo $\emptyset$ el conjunto vacío.

Eventos independientes

Dos eventos **A** y **B** son independientes si la ocurrencia de uno no afecta la ocurrencia del otro. En este caso se cumple que:

$$P(A \cap B) = P(A) * P(B)$$

Si **A** y **B** no son independientes, se dice que son dependientes.

Ejemplo

Si de una baraja de 52 cartas, se extrae una de ellas, se coloca de nuevo en el paquete y se toma una segunda carta. Se consideran los eventos **A**: se extrae un 7 y **B**: se extrae un corazón rojo. Responda:

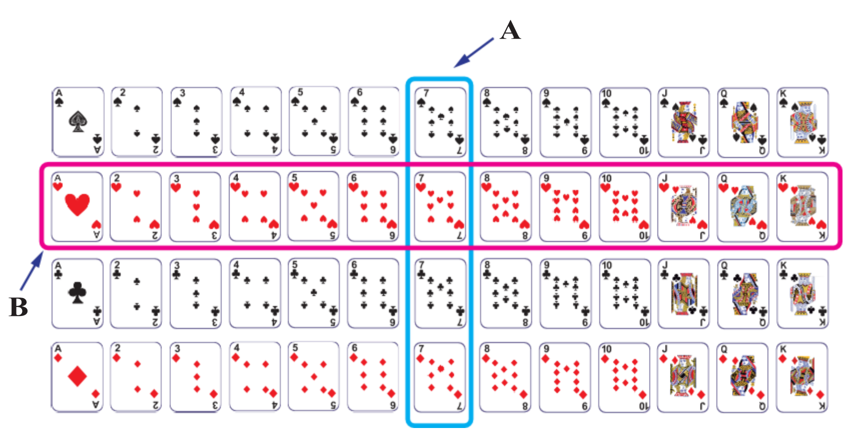
a) ¿La ocurrencia de cualquiera de los eventos afecta o depende de la ocurrencia del otro?

b) Calcule $P(A), P(B)$ **y** $P(A \cap B)$

c) Compare $P(A \cap B)$ **y** $P(A) * P(B)$

Solución:

a) El espacio muestral lo constituyen las 52 cartas de la baraja. Si, por ejemplo, en la primera extracción ocurriese el evento **A**, esto no afectaría que en la segunda extracción se dé el evento **B**, dado que la carta extraída se coloca de nuevo en la baraja. De igual forma se tendrá que la ocurrencia de **B** no ha de alterar o impedir la del evento **A**



b) De las 52 cartas, 4 muestran el número 7, 13 son de corazón rojo y entre estas hay una que es 7 de corazón de rojo, esto se ilustra en la figura de abajo, de modo que $A \cap B = \{7\ corazón\ rojo\}$, luego:

$P(A) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$ $\quad P(B) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$ $\quad$ y $\quad P(A \cap B) = \frac{1}{52}$

c) Por lo obtenido en el inciso anterior:

$$P(A) * P(B) = \left(\frac{1}{13}\right)\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{52} = P(A \cap B)$$

$$Por\ tanto, \quad \boldsymbol{P(A \cap B) = P(A) * P(B)}$$

Practica lo Aprendido

I. Resuelva los siguientes problemas utilizando la probabilidad de dos eventos.

01. Si se lanza un dado, ¿cuál es la probabilidad de obtener un número impar o un múltiplo de 3?
02. Se lanzan dos dados, ¿cuál es la probabilidad de obtener un 6 como suma de los resultados de las caras o números iguales en estas?
03. Se requiere estudiar el efecto de tres medicamentos en el tratamiento de una enfermedad infecciosa. Para ello, disponemos de un grupo de pacientes infectados, distribuyéndolos al azar en tres grupos de tratamientos. Los datos se resumen en la siguiente tabla:

	Tratamiento A	Tratamiento B	Tratamiento C	Total
Si mejora	23	33	35	91

No mejora	12	7	35	31
Total	35	40	47	122

a) ¿Cuál es la probabilidad de que, al seleccionar a un paciente al azar, este haya tomado el Tratamiento A o Tratamiento B?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que al seleccionar a un paciente al azar este haya tomado el Tratamiento Bo el Tratamiento C?

c) ¿Cuál es la probabilidad de seleccionar al azar un paciente este haya mejorado o haya tomado el tratamiento C?

d) ¿Cuál es la probabilidad de seleccionar al azar un paciente este no haya mejorado o haya tomado el Tratamiento A?

04. Se hizo una encuesta a cierto grupo de personas sobre la ruta de bus que utilizan para ir a su trabajo. Resultó que el 70% usa la ruta Jinotega-Managua, el 40% usa Esteli-Managua y el 30% ambas. Calcule la probabilidad de que al seleccionar al azar una de las personas consultadas, esta use alguna de las dos rutas de buses.

05. En el último corte evaluativo, el 75% de los estudiantes aprobó Matemáticas, el 80% aprobó inglés y el 60% aprobó las dos asignaturas. Seleccione al azar a uno de estos estudiantes y calcule la probabilidad de que:

a) Haya aprobado alguna de las asignaturas

b) Haya aprobado solo matemática

c) No haya aprobado ninguna de las dos asignaturas

d) Haya aprobado solo una de las dos asignaturas.

II. Resuelve los siguientes problemas de eventos mutuamente excluyentes.

01. Se tiene un libro de cada una de las materias: Matemática, Biología, Química, Física y Lengua y Literatura. Si se toma uno de ellos, ¿cuál es la probabilidad de que este sea de Matemática o de Física?
02. La probabilidad de que Juan asista a un bachillerato estatal es $\frac{2}{5}$ y la de que asista a un bachillerato privado es $\frac{1}{2}$. Si Juan no puede asistir a ambos simultáneamente, ¿cuál es la probabilidad de asistir a uno u otro bachillerato?
03. Si se escoge una carta de una baraja de 52 cartas, ¿cuál es la probabilidad de escoger un corazón o un diamante?
04. Si se arrojan dos dados, encuentre la probabilidad de que la suma de los dos números de las caras sea 5 u 11.
05. Determine la probabilidad que, al ordenar 3 niñas y un niño, dos niñas específicas siempre estén juntas y 2 niños específicos estén siempre juntos.

III. Resuelve los siguientes problemas identificando en cada caso eventos independientes.

1. Determina la probabilidad de que al extraer 2 cartas una tras otra de una baraja (con reemplazo), se cumpla que la primera es carta roja, y la segunda es “J” o de diamantes.
2. En una bolsa hay 4 canicas rojas y 3 verdes. ¿Cuál es la probabilidad de que, al sacar dos canicas con reposición, estas sean rojas?
3. Si se lanzan dos monedas, ¿Cuál es la probabilidad de obtener dos escudos?
4. El lanzamiento de dos dados, uno después del otro, ¿Cuál es la

probabilidad de que en el primer lanzamiento resulte 3 y en el segundo un número impar?

5. ¿Determine la probabilidad de lanzar una moneda tres veces, se obtenga solamente una cara y sea el último lanzamiento?
6. ¿Determinar la probabilidad de que al responder 5 preguntas de verdadero y falso al azar se obtengan 4 respuestas correctas?

Guía de autoestudio

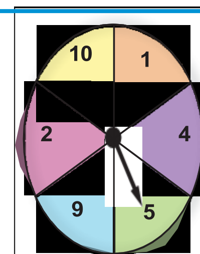
A continuación, se proponen las siguientes actividades para que realice su autoestudio.

Realiza las siguientes actividades en casa y en tu cuaderno copia las situaciones siguientes, no olvides trabajar en equipo o de forma individual si lo deseas.

Resuelve la siguiente situación problemática:

Imagine que hace girar en sentido horario la aguja de la ruleta de la derecha. Calcule la probabilidad de cada evento:

a) **A**: obtener un número entero.
b) **B**: obtener un número negativo.
c) **C**: obtener un múltiplo de 5.



Encuentro 14, 15 y 16:

Propiedades de las probabilidades

Descripción

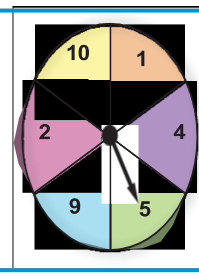
Estimado estudiante, en este encuentro estudiaremos la probabilidad y sus propiedades, en la solución de situaciones de la vida cotidiana.

A continuación, te presentamos la siguiente información referida al contenido en estudio para que la leas y analices cada uno de los ejemplos desarrollados.

Analicemos la siguiente situación problemática:

Imagine que hace girar en sentido horario la aguja de la ruleta de la derecha. Calcule la probabilidad de cada evento:

d) **A**: obtener un número entero.
e) **B**: obtener un número negativo.
f) **C**: obtener un múltiplo de 5.



Solución:

El total de resultados posibles es 6. Para cada inciso tenemos:

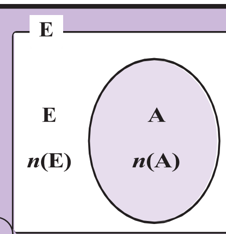
a) En este caso el número de casos favorables es 6, igual al número de elementos del espacio muestral, por lo cual: $P(A) = \frac{6}{6} = 1$

b) Dado que en la ruleta no aparecen números negativos, hay 0 casos favorables a este hecho y: $P(B) = \frac{0}{6} = 0$

c) En la ruleta aparecen 2 múltiplos de 5: 5 y 10, de manera que $n(C) = 2$ y su probabilidad es $P(C) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

Observe que $\frac{1}{3}$, es un número no negativo y menor que 1, por lo cual se puede decir que: $0 \leq P(C) \leq 1$.

El número de elementos de un evento cumple la relación:



$0 \leq n(A) \leq n(E)$. (1)

Al dividir (1) entre $\boldsymbol{n}(\mathbf{E})$ se tiene

$$\frac{0}{n(E)} \leq \frac{n(A)}{n(E)} \leq \frac{n(E)}{n(E)}$$

es decir, $0 \leq P(A) \leq 1$.

Propiedades de la probabilidad

1. $0 \leq P(A) \leq 1,$ para cualquier evento **A**.
2. $P(E) = 1$, en cuyo caso **E** (considerado un evento), se denomina evento seguro.
3. Denotando un evento imposible con $\emptyset$ se tiene que $P(\emptyset) = 0$
4. $P(AUB) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, si A y B son mutuamente excluyentes, entonces

   $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

(*) La propiedad 4. fue verificada en contenidos anteriores.

Ejemplo

En un juego se tiene una baraja tradicional del que se ha quitado 3 cartas de corazones, una de diamantes y dos de tréboles, el juego consiste en adivinar de qué palo (grupo) será la carta que se extraiga de la baraja modificada (espadas, corazones, tréboles o diamantes). Determine la opción que tiene mayor probabilidad de ganar.

Solución:

En una baraja original hay 13 carta de cada palo (grupo), para un total de 52 cartas, es decir hay 13 cartas de diamantes equivalente a un palo, 13 cartas de corazones equivalente a un palo, hay 13 espadas equivalente a un palo y 13 tréboles equivalente a un palo.

Cartas Eliminadas:

3 corazones, por lo que se tiene: $13-3=10$

1 diamante, por lo que se tiene: $13-1=12$

2 tréboles, por lo que se tiene: $13-2=11$

De las espadas no se elimina ninguna, es decir hay 13 cartas completas.

Total, de cartas restantes: $10+12+11+13=46$ cartas

Probabilidad por palo (grupo), para ello, sea los eventos:

A: corazones, entonces:$P(A)=\frac{n(A)}{n(E)}=\frac{10}{52}=0.19\ aproximadamente$

B: diamantes, entonces: $P(B)=\frac{n(B)}{n(E)}=\frac{12}{52}=0.23\ aproximadamente$

C: tréboles, entonces: $P(C)=\frac{n(C)}{n(E)}=\frac{11}{52}=0.21\ aproximadamente$

D: espadas, entonces: $P(D)=\frac{n(13)}{n(E)}=\frac{13}{52}=0.25\ aproximadamente$

Por tanto, la opción que tiene mayor probabilidad de es que sea una carta de espadas con $P(D)=\frac{n(13)}{n(E)}=\frac{13}{52}=0.25$.

Además, se observa que ningún evento esta entre:

$0\leq P(A)\leq 1$, se observa que: $0\leq 0.19\leq 1$

$0\leq P(B)\leq 1$, se observa que:$0\leq 0.23\leq 1$

$0\leq P(C)\leq 1$, se observa que: $0\leq 0.21\leq 1$

$0 \leq P(D) \leq 1$, se observa que:$0 \leq 0.25 \leq 1$

Conclusión, ningún evento es seguro, pero el de mayor probabilidad es el palo de espadas con: $P(D) = \frac{n(13)}{n(E)} = \frac{13}{52} = 0.25.$

Practica lo Aprendido

Resuelve los siguientes problemas asignados:

01. En el experimento de lanzar un dado, verifique las propiedades de la probabilidad

    calculando **P(A), P(B), P(C) y P(AUB)** para los eventos siguientes:

    a) A: cae en número positivo.

    b) B: obtener un múltiplo de 3.

    c) C: cae en número par o impar.

02. Si se elige al azar un número natural del 1 al 10, calcule la probabilidad de cada evento:

    a) **A**: obtener número par.

    b) **B**: obtener número positivo.

    c) **C**: obtener un número mayor que 15.

03. En una bolsa se tienen fichas enumeradas de 1 al 8. Si se extrae una de etas fichas al azar, calcule la probabilidad de los eventos:

    a) A: extraer un número par

    b) B: extraer un número impar

    c) C: extraer un múltiplo de 4

04. En una urna hay 10 pelotas enumeradas del 1 al 10. Si se extrae una pelota al azar, calcule la probabilidad de casar un número par o múltiplo de 3.

05. La probabilidad de que un hombre viva 20años es 1/4, y la de que su mujer viva 20 años es 1/3, calcule la probabilidad de que ambos vivan 20 años.

06. 20 artículos producidos en el taller de madera, 12 defectuosos y 8 no defectuosos, son inspeccionados por el dueño uno a uno. Si los artículos son seleccionados al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que los dos primeros sean defectuosos?

07. Pedro García guarda en un cajón 10 pares de calcetines: 2 de color negro, 2 de color café, 3 de color blanco, 1 de color rojo, 1 de color azul, 1 de color verde. Hoy quiere usar un par de color blanco por lo que, sin ver introduce la mano al cajón, extrae un par. Si no es blanco lo devolverá al cajón. Si continúa extrayendo pares de calcetines al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que sacara un par blanco en su tercer intento?

08. A un taller de mecánica, se sabe que, en promedio, acuden: por la mañana 3 automóviles con problemas eléctricos, 8 con problemas mecánicos y 3 con problemas de carrocería, por la tarde: 2 con problemas eléctricos. 3 con problemas mecánicos y uno con problemas de carrocería.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que en el día acudan automóviles o con problemas eléctricos o con problemas mecánicos?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que en un automóvil acuda por la tarde o tenga problemas mecánicos?

09. En un grupo de 30 estudiantes, de los cuales 22 son mujeres, 5 prefieren ajedrez, 15 el beisbol, y 10 el baloncesto. ¿Cuál es la probabilidad de seleccionar al azar, este sea varón y prefiera beisbol?

10. En un pueblo de nuestro país, el 40% de la población tiene cabello negro, el 25% tiene ojos negros y el 15% tiene cabello y ojos negros. Calcule la probabilidad de que al seleccionar al azar una persona de este pueblo:
    a) Tenga cabello y ojos negros
    b) Tenga solo cabello negro o bien ojos negros

Referencias bibliográficas

Díaz Vega, F.E.; Espinoza Espinoza, M.J.; Herrera Herrera, P.; Jarquín López H.A.; Primera Edición, (2019), Matemática 11, Undécimo Grado, La presente publicación ha sido reproducida con el apoyo de la Agencia de Cooperación Internacional del Japón (JICA) a través del Proyecto para el Aprendizaje Amigable de Matemática en Educación Secundaria (NICAMATE). Republica de Nicaragua.

¡UNIDA, NICARAGUA TRIUNFA!

MINED

Un Ministerio en la Comunidad